



پدید آورندگان آزمون ۲۹ اردیبهشت سال یازدهم ریاضی

طراحان

نام درس	نام طراحان
حسابان (۱)	مجتبی نادری - محمد بحیرایی - مصطفی بهنام مقدم - علی آزاد - سیدوحید سیدان - سعید عزیزی - اکبر کلاه ملکی - محمد حمیدی - سجاد داوطلب - امیر مرادیان
هندسه (۲)	هادی فولادی - فرزانه خاکپاش - محمد خندان - امیرحسین ابومحبوب - رضا عباسی اصل - محمد حمیدی
آمار و احتمال	ندا صالح پور - فرزانه خاکپاش - امیرحسین ابومحبوب - سیدمحمد رضا حسینی فرد - رضا عباسی اصل - مهدی نیک زاد
فیزیک (۲)	معصومه شریعت ناصری - اشکان ولی زاده - عبدالرضا امینی نسب - بهنام رستمی
شیمی (۲)	رسول عابدینی زواره - پویا رستگاری - کامران کیومرثی - منصور سلیمانی ملکان - علی فرزاد تبار - عباس هنرجو - یاسر علیشائی - مرتضی رضائی زاده - روزبه رضوانی - حمید ذبیحی - شهرام همایون فر - مرتضی حسن زاده - یاسر راش

گزینشگران، مسئولین درس و ویراستاران

نام درس	گزینشگر	مسئول درس	گروه ویراستاری	مسئول درس مستندسازی
حسابان (۱)	ایمان چینی فروشان	ایمان چینی فروشان	حمیدرضا رحیم خانلو، مهرداد ملوندی، عادل حسینی	سمیه اسکندری
هندسه (۲)	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	مهرداد ملوندی	سرژیقیا زاریان تبریزی
آمار و احتمال	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	مهرداد ملوندی	سرژیقیا زاریان تبریزی
فیزیک (۲)	معصومه افضلی	معصومه افضلی	حمید زرین کفش، محمد رضا اصفهانی، زهره آقامحمدی، بابک اسلامی	احسان صادقی
شیمی (۲)	ایمان حسین نژاد	ایمان حسین نژاد	مهلا تابش نیا، پویا رستگاری	امیرحسین مرتضوی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	بابک اسلامی
مسئولین دفترچه	لیلا نورانی
مستندسازی و مطابقت با مصوبات	مدیر گروه: محیا اصغری
	مسئول دفترچه: سمیه اسکندری
حروفنگاری و صفحه آرایی	فاطمه علی یاری
نظارت چاپ	حمید محمدی

بنیاد علمی آموزشی قلم چی (وقف عام)



حسابان (۱)

۱- گزینه «۲»

(مجتبی تادری)

می‌دانیم اگر X_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز مانند (a, b) شامل X_0 را یک همسایگی X_0 می‌نامیم و اگر X_0 را از بازه موردنظر حذف کنیم، مجموعه $\{X_0\} - (a, b)$ را همسایگی محذوف X_0 می‌نامیم.

$$\{2\} - (-5, 5) = (-5, 2) \cup (2, 5): \text{بررسی گزینه «۱»}$$

بنابراین این گزینه یک همسایگی محذوف $X_0 = 2$ هست.

$$\{2\} - (-2, \frac{3}{2}) = (-2, \frac{3}{2}): \text{بررسی گزینه «۲»}$$

طبق تعریف این گزینه یک همسایگی محذوف $X_0 = 2$ نیست.

$$|x-2| < 2 \xrightarrow{x \neq 2} 0 < |x-2| < 2: \text{بررسی گزینه «۳»}$$

$$\Rightarrow -2 < x-2 < 2 \Rightarrow 0 < x < 4 \Rightarrow x \in (0, 4) - \{2\}$$

این مجموعه نیز یک همسایگی محذوف $X_0 = 2$ است.

$$-5 < x-2 < 5 \Rightarrow \frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{5} \Rightarrow |x-2| < 5: \text{بررسی گزینه «۴»}$$

$$\Rightarrow -3 < x < 7 \xrightarrow{x \neq 2} x \in (-3, 7) - \{2\}$$

X باید مخالف ۲ باشد زیرا در غیر این صورت کسر $\frac{1}{|x-2|}$ تعریف نشده است.

این مجموعه نیز یک همسایگی محذوف $X_0 = 2$ است.

(مسابان ۱- مر و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۲- گزینه «۴»

(مجتبی تادری)

اگر نمودار تابع $y = \sin x$ را نسبت به محور X ها قرینه کنیم و یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار صورت سؤال به دست می‌آید. لذا نمودار داده شده مربوط به تابع $y = -\sin x - 1$ است.

بررسی گزینه‌ها:

نادرست $y = -\cos(\pi - x) = +\cos x$:گزینه «۱»

نادرست $y = -\sin(\pi + x) - 1 = \sin x - 1$:گزینه «۲»

نادرست $y = \sin(\frac{\pi}{2} - x) - 1 = \cos x - 1$:گزینه «۳»

درست $y = -\sin(\pi - x) - 1 = -\sin x - 1$:گزینه «۴»

(مسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۹)

۳- گزینه «۲»

(مهمرب بصیرایی)

فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = a$ و $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = b$ باشد، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (4f - 3g)(x) = 9 \Rightarrow 4a - 3b = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (f + 2g)(x) = 5 \Rightarrow a + 2b = 5$$

$$\begin{cases} 4a - 3b = 9 \\ -4a - 8b = -20 \end{cases} \Rightarrow -11b = -11 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{f \times g}{g - 2} \right)(x) = \frac{a \times b}{b - 2} = \frac{3 \times 1}{1 - 2} = -3$$

(مسابان ۱- مر و پیوستگی- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶)

۴- گزینه «۳»

(مهمرب بصیرایی)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f([x]) = f(1) = 2$$

چون مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ برابر عدد ۳ هست پس جزء صحیح آن نیز برابر ۳ می‌شود. در نتیجه:

$$[\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)] = [3] = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2 \Rightarrow \text{عبارت} = 2 + 3 + 2 = 7$$

(مسابان ۱- مر و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۳۶)



۵- گزینه «۴»

(مصطفی پونا مقدم)

$$\begin{aligned}\log(r^x + \lambda) &= \log r + x \log r = \log r + \log r^x \\ &= \log r^{x+1} = \log r^{x+1} \Rightarrow \log(r^x + \lambda) = \log r^{x+1} \\ &\Rightarrow r^x + \lambda = r^{x+1} \Rightarrow \lambda = r^{x+1} - r^x \Rightarrow \lambda = r^x(r-1) \Rightarrow x = 3\end{aligned}$$

$$\frac{\log_x r + 3}{\log_x r + 1} = \frac{\log_r r + 3}{\log_r r + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۶- گزینه «۴»

(مجتبی تارری)

$$\begin{aligned}f(r) = 3 &\Rightarrow r^{fa+b} = 3 \Rightarrow fa + b = 1 \\ f^{-1}(1) = 4 &\Rightarrow f(4) = 1 \Rightarrow r^{4a+b} = 1 \Rightarrow 4a + b = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} fa + b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

از حل دستگاه دو معادله، دو مجهول به دست آمده، مقادیر a و b را می‌یابیم:

$$-1 \times \begin{cases} fa + b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -fa - b = -1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a = -1$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{3}, b = 2$$

بنابراین $f(x) = 3^{2(-\frac{1}{3})x+2}$ و همچنین داریم:

$$f(-4) = 3^{-\frac{1}{2}(-4)+2} = 3^4$$

$$\Rightarrow \log_{27} f(-4) = \log_{27} 3^4 = \frac{4}{3} \log_3 3 = \frac{4}{3}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۰ تا ۹۰)

۷- گزینه «۴»

(علی آزار)

ابتدا نقاط ابتدا و انتهای نمودار را در بازه $[-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}]$ به دست می‌آوریم.

$$x = -\frac{\pi}{5} \Rightarrow f(-\frac{\pi}{5}) = \log_b^{-\frac{\pi}{5}+a} \Rightarrow A(-\frac{\pi}{5}, \log_b^{-\frac{\pi}{5}+a})$$

$$x = \frac{\pi}{5} \Rightarrow f(\frac{\pi}{5}) = \log_b^{\frac{\pi}{5}+a} \Rightarrow B(\frac{\pi}{5}, \log_b^{\frac{\pi}{5}+a})$$

شیب خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد، به صورت زیر خواهد بود:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log_b^{\frac{\pi}{5}+a} - \log_b^{-\frac{\pi}{5}+a}}{\frac{\pi}{5} - (-\frac{\pi}{5})} = \frac{\log_b^{\frac{\pi}{5}+a}}{\frac{\pi}{5}} = \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow \log_b^{\frac{\pi}{5}+a} = 3 \Rightarrow \frac{a+3}{a-\frac{\pi}{5}} = b^3 \Rightarrow \frac{a-\frac{\pi}{5}+3/\frac{\pi}{5}}{a-\frac{\pi}{5}} = b^3$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{3/\frac{\pi}{5}}{a-\frac{\pi}{5}} = b^3 \Rightarrow \frac{\frac{3}{\pi}}{a-\frac{\pi}{5}} = b^3 - 1 \Rightarrow \frac{3}{2a-1} = b^3 - 1$$

$$\Rightarrow \log_b \frac{3}{b^3-1} = \log_b \frac{1}{b^3-1} = -\log_b \frac{b^3-1}{1} = -1$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۰ تا ۹۰)

۸- گزینه «۱»

(علی آزار)

$$\log_3^x + \log_3^y = \log_3^{xy} = 2 \Rightarrow xy = 3^2 = 9$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 46 + 2(9) = 64$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 8 & \text{صحیح} \\ x+y = -8 & \text{غلط} \end{cases}$$

$$\log_9^{x+y} = \log_9^8 = \log_3^{\frac{8}{2}} = \frac{8}{2} = 4$$

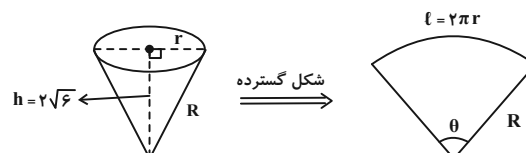
(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۰ تا ۹۰)



۹- گزینه «۱»

(سید و فیر سیران)

شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



$$S_{\text{قاعده}} = \pi r^2 = 12\pi \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$$

$$R^2 = h^2 + r^2 = 24 + 12 = 36 \Rightarrow R = 6$$

$$l = 2\pi r = 2\pi \times 2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{l}{R} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{6} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{3} \text{ رادیان}$$

$$\frac{2\pi}{3}\sqrt{3} \times \frac{18^\circ}{\pi} = 120^\circ\sqrt{3} \text{ درجه}$$

(مسایان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۱۰- گزینه «۳»

(علی آزار)

داریم:

$$\frac{\pi}{24} + \frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{11\pi}{24} = \sin \frac{\pi}{24}$$

$$\frac{\Delta\pi}{24} + \frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{7\pi}{24} = \sin \frac{\Delta\pi}{24}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\Delta\pi}{24} \cos \frac{7\pi}{24} \cos \frac{11\pi}{24}$$

$$= \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\Delta\pi}{24} \sin \frac{\Delta\pi}{24} \sin \frac{\pi}{24} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{24} \times \frac{1}{2} \sin \frac{10\pi}{24}$$

$$= \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{24} \times \sin \frac{10\pi}{24} = \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{24} \cos \frac{2\pi}{24}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{24} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{16}$$

(مسایان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۲ تا ۱۱۳)

۱۱- گزینه «۱»

(سعید عزیزی)

ابتدا زاویه‌های داده شده را با توجه به نقاط مرزی بر روی دایره مثلثاتی، تا حد امکان ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin(3 \times 18^\circ - 2^\circ) + \cos(4 \times 18^\circ - 2^\circ)}{\cos(5 \times 9^\circ + 2^\circ) + \sin(7 \times 9^\circ + 2^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{-\sin 2^\circ - \cos 2^\circ} = -1$$

(مسایان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۱۲- گزینه «۳»

(اکبر کلاه‌ملکی)

$$\text{برای گزینه «۱»: تابع } f(x) = \begin{cases} 2 & ; x > 0 \\ -2 & ; x < 0 \end{cases} \text{ را در نقطه } x = 0 \text{ در نظر}$$

بگیرید.

برای گزینه «۲»: فرض کنید $f(x) = [x]$ و $g(x) = x - 1$ در نقطه $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)[x] = 0 \quad \text{داریم:}$$

برای گزینه «۴»: فرض کنید $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = x - 2$ در نقطه $x = 2$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$$

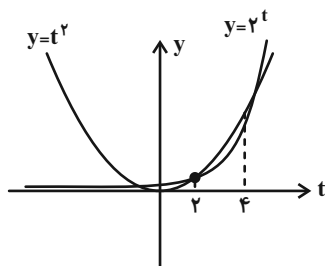
(مسایان ۱- مر و پیوستگی- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۴)

۱۳- گزینه «۲»

(مهمر همیدی)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{[(\Delta x)^2 - 2\Delta x]}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x = t} \lim_{t \rightarrow 2^+}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} [t^2 - 2t]$$





۱۶- گزینه «۴»

(مفهم عمیری)

وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، پس $x < 1$ در نتیجه $-x > -1$ و داریم $[-x] = -1$. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x + [-x]}{x^3 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2x+1)(x-1)}{(x^2+x+3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x^2+x+3} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \text{ و } \frac{3}{5}$$

(مسابان ۱- در و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۳۶ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۷- گزینه «۴»

(علی آزار)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = -2$$

با توجه به اینکه حد مخرج کسر صفر می‌باشد، می‌بایست $X = -1$ ریشه صورت کسر نیز باشد.

$$2(-1)^3 + (-1)^2 + a(-1) + b = 0 \Rightarrow b - a = 1$$

$$\begin{array}{l} 2x^3 + x^2 + ax + b \left| \begin{array}{l} x+1 \\ 2x^2 - x + (a+1) \end{array} \right. \\ \hline -(2x^3 + 2x^2) \\ \hline -x^2 + ax + b \\ \hline -(-x^2 - x) \\ \hline (a+1)x + b \\ \hline -((a+1)x + (a+1)) \\ \hline b - a - 1 = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2 - x + (a+1))}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{2+1+a+1}{-2} = -2 \Rightarrow 4+a=6 \Rightarrow a=2 \\ \frac{b-a=1}{b-a=1} &\Rightarrow b=3 \Rightarrow a+b=5 \end{aligned}$$

(مسابان ۱- در و پیوستگی- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

با توجه به نمودار واضح است که به ازای $t \rightarrow 2^+$ مقدار t^2 بزرگتر از 2^2 است. پس:

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} [t^2 - 2^2] = [0^+] = 0$$

(مسابان ۱- در و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۳۶)

۱۴- گزینه «۳»

(مجتبی نادری)

چون تابع f در نقطه $x=1$ دارای حد است بنابراین حد چپ و حد راست آن در نقطه $x=1$ با هم برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - [x]) = 1 - [1^-] = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - ax^2) = 2 - a$$

$$\Rightarrow 1 = 2 - a \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{[x] - x}{x^2 - 9} = \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{رفع ابهام} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - x}{(x-3)(x+3)} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[3^+] - 3}{(3-3)(3+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3-x}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{-1}{6} \end{aligned}$$

(مسابان ۱- در و پیوستگی- صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۴۱ و ۱۴۴ تا ۱۴۶)

۱۵- گزینه «۱»

(مجتبی نادری)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin x}{[x] + [-x]}, & x \geq \frac{\pi}{2} \text{ یا } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ [\cos x], & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} [\cos x] = [\cos(\frac{\pi}{2})^-] = [0^+] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \frac{2 \sin x}{[x] + [-x]} = \frac{2 \sin(-\frac{\pi}{2})}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

لذا گزینه «۱» صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} ([x] + [-x]) = -1$$

توجه داشته باشید که:

(مسابان ۱- در و پیوستگی- صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۴۰)



۱۸- گزینه «۲»

(سباز راوطلب)

اولاً: تابع در $X = 2$ باید پیوستگی راست داشته باشد.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 4a - 2b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 2a - b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a - 2b = 2a - b \Rightarrow b = 2a \quad (1)$$

ثانیاً: تابع در $X = 3$ باید پیوسته باشد:

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3a - b$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2x^2 + 18}{27(x^2 - 4x + 3)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2x^2 + 18}{(x-1)(x-3)(27)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-3)(27)}$$

$$= \frac{-12}{2 \times 27} = -\frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow 3a - b = -\frac{2}{9} \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} a = \frac{-2}{9} \\ b = \frac{-4}{9} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$

(مسئله ۱- هر دو پیوستگی - صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۶ و ۱۴۱ تا ۱۵۱)

۱۹- گزینه «۳»

(امیر مرادیان)

تابع f چون شامل $[x]$ می‌باشد پس ممکن است در نقاط صحیح ناپیوسته باشد، $x > 0$ و $x \in \mathbb{Z}$ را بررسی می‌کنیم

$$x = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} [x](x-1) &= (1)(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} [x](x-1) &= (0)(0) = 0 \\ f(1) &= 1 \times (0) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow X = 1 \text{ پیوسته است.}$$

$$x = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} [x](x-1) &= 2 \times (1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} [x](x-1) &= (1)(1) = 1 \\ f(2) &= 2 \times (1) = 2 \end{aligned} \right\}$$

 \Rightarrow در $X = 2$ پیوسته نیست.پس اگر $a = 2$ باشد، تابع f در بازه $(2, \infty)$ پیوسته می‌باشد. دقت کنید که بهازای $a > 2$ تابع f در نقطه $X = 2$ ناپیوسته می‌باشد.

(مسئله ۱- هر دو پیوستگی - صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۶ و ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۲۰- گزینه «۲»

(علی آزار)

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$x + 3 = t \Rightarrow x = t - 3$$

$$f(t) = \begin{cases} [t-3] + a & ; t-3 > 1 \\ \Delta & ; t-3 = 1 \\ 2[t-3] + |t-3-3| + b & ; t-3 < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = \begin{cases} [t]-3+a & ; t > 4 \\ \Delta & ; t = 4 \\ 2[t]-6+|t-6|+b & ; t < 4 \end{cases}$$

$$f(4) = \Delta, \quad \lim_{t \rightarrow 4^+} f(t) = 4 - 3 + a = 1 + a$$

$$\lim_{t \rightarrow 4^-} f(t) = 6 - 6 + 2 + b = 2 + b \Rightarrow \begin{cases} 1 + a = \Delta \Rightarrow a = 4 \\ 2 + b = \Delta \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

$$a + 3b = 4 + 9 = 13$$

(مسئله ۱- هر دو پیوستگی - صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۶ و ۱۴۵ تا ۱۵۱)

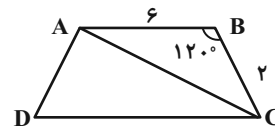


هندسه (۲)

۲۱- گزینه «۳»

(هاری فولاری)

می‌دانیم در دوزنقه متساوی‌الساقین، زوایای مجاور به هر ساق مکمل یکدیگرند، پس

 $\hat{B} = 120^\circ$ است و طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos \hat{B}$$

$$= 6^2 + 2^2 - 2 \times 6 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 52 \Rightarrow AC = 2\sqrt{13}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

۲۲- گزینه «۱»

(غرزانه قالیباش)

ضلع روبه‌رو به زاویه A (ضلع BC) بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC است، پس هر سه حالت حاده، قائمه و منفرجه برای آن امکان‌پذیر است. برای تعیین دقیق آن، مربع اندازه ضلع BC را با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر مقایسه می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 10^2 + 8^2 = 164 \\ BC^2 &= 12^2 = 144 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow BC^2 < AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A} \text{ حاده است}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه ۷۶)

۲۳- گزینه «۴»

(غرزانه قالیباش)

$$\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = 30^\circ \Rightarrow \cos \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

طول نیمساز داخلی زاویه A برابر است با:

$$AD = \frac{2bc \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c} = \frac{2 \times 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{4+2} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه ۷۶)

۲۴- گزینه «۱»

(مهمر فخران)

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (30^\circ + 15^\circ) = 135^\circ$$

طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 135^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 135^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۲۵- گزینه «۳»

(امیرفریدین ابومصوب)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} \Rightarrow 15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\hat{A} > 90^\circ} \hat{A} = 120^\circ \Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{1}{2}$$

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

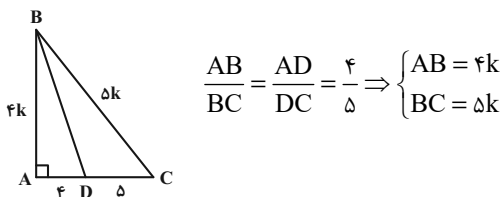
$$= 36 + 100 - 2 \times 6 \times 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 136 + 60 = 196 \Rightarrow BC = 14$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹ و ۷۳)

۲۶- گزینه «۴»

(رضا عباسی اصل)

طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی داریم:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} AB = 4k \\ BC = 5k \end{cases}$$

$$\Delta ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 25k^2 = 16k^2 + 9^2$$

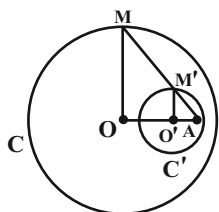
$$\Rightarrow 9k^2 = 81 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow \begin{cases} AB = 12 \\ BC = 15 \end{cases}$$

بنابراین طبق رابطه طول نیمساز داخلی مثلث داریم:

$$BD^2 = AB \times BC - AD \times DC = 12 \times 15 - 4 \times 5 = 160$$

$$\Rightarrow BD = 4\sqrt{10}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)



طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث OAM داریم:

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{R'}{R} \xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}} \frac{AO'}{AO - AO'} = \frac{R'}{R - R'} \Rightarrow \frac{AO'}{OO'} = \frac{R'}{R - R'}$$

$$\Rightarrow \frac{AO'}{R'} = \frac{OO'}{R - R'}$$

چون دو دایره متداخل هستند، پس $OO' < R - R'$ و در نتیجه داریم:

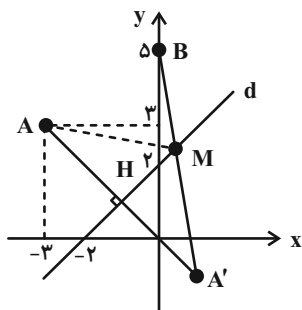
$$\frac{AO'}{R'} < 1 \Rightarrow AO' < R' \Rightarrow \text{A درون دایره } C' \text{ است}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۵ تا ۵۱)

۳۰- گزینه «۴»

(هاری فولاری)

مطابق شکل دو نقطه A و B در یک طرف خط $y = x + 2$ قرار دارند، بنابراین کافی است بازتاب نقطه A نسبت به خط d را پیدا کرده (نقطه A') و از آن نقطه به B وصل کنیم. طول پاره خط $A'B$ برابر طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن AMB خواهد بود.



$$m_d = 1 \Rightarrow m_{AA'} = -1$$

$$AA' \text{ خط } y - 3 = -1(x + 2) \Rightarrow y = -x$$

اگر H نقطه برخورد d و AA' باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x + 2 = -x \Rightarrow x_H = -1 \Rightarrow y_H = 1$$

$$\begin{cases} x_H = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-3 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 1 \\ y_H = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'(1, -1)$$

$$A'B = \sqrt{(0-1)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{37}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه ۵۴)

۲۷- گزینه «۲»

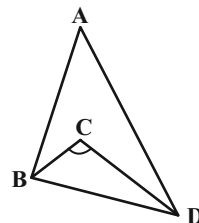
(امیرحسین ابومصوب)

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث BCD داریم:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \times CD \times \cos \hat{C}$$

$$= (\sqrt{5} - 1)^2 + (\sqrt{5} + 1)^2 - 2(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)(-\frac{1}{2})$$

$$= 6 - 2\sqrt{5} + 6 + 2\sqrt{5} + (5 - 1) = 16 \Rightarrow BD = 4$$



طبق قضیه هرون در مثلث ABD داریم:

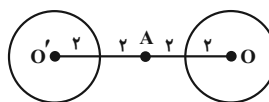
$$P = \frac{5 + 7 + 4}{2} = 8$$

$$S_{ABD} = \sqrt{8(8-5)(8-7)(8-4)} = 4\sqrt{6}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹ و ۷۴)

۲۸- گزینه «۴»

(امیرحسین ابومصوب)



دوران تبدیلی طولی است، پس $R' = R = 2$. از طرفی مطابق شکل

است، بنابراین داریم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

$$= \sqrt{8^2 - (2 - 2)^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$$

$$= \sqrt{8^2 - (2 + 2)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{\text{طول مماس مشترک خارجی}}{\text{طول مماس مشترک داخلی}} = \frac{8}{4\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۲۹- گزینه «۱»

(مهمر حمیری)

از نقطه O' (مرکز دایره C') به نقطه دلخواه M' روی دایره C' وصل می‌کنیم و

سپس از نقطه O (مرکز دایره C) خطی به موازات $O'M'$ رسم می‌کنیم تا دایره

C را در نقطه M قطع کند. از M به M' وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا امتداد

OO' را در نقطه A (مرکز تجانس) قطع می‌کند.



آمار و احتمال

۳۱- گزینه «۱»

(نردا صالح پور)

خط فقر برابر نصف میانگین درآمد افراد جامعه است، پس گزینه «۱» نادرست است.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی - صفحه‌های ۱۱۰، ۱۱۵ و ۱۲۲)

۳۲- گزینه «۲»

(غریزانه فاکپاش)

بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جامعه به صورت $\left[\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ است، یعنی طول بازه اطمینان برابر $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ بوده و در نتیجه داریم:

$$\frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = 13/2 - 12/6 = 0/6 \xrightarrow{n=25} \frac{4\sigma}{5} = 0/6 \Rightarrow \sigma = 0/75$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی - صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲)

۳۳- گزینه «۱»

(غریزانه فاکپاش)

ابتدا میانگین نمونه و انحراف معیار جامعه را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{1+2+4+5}{4} = 3$$

$$\sigma^2 = 1/44 \Rightarrow \sigma = 1/2$$

فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جامعه براساس این نمونه به صورت زیر

به دست می‌آید:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n=4} 3 - \frac{2 \times 1/2}{2} \leq \mu \leq 3 + \frac{2 \times 1/2}{2}$$

$$\Rightarrow 1/8 \leq \mu \leq 4/2$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی - صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲)

۳۴- گزینه «۳»

(امیرحسین ابومصوب)

میانگین این جامعه برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

تعداد اعضای فضای نمونه برابر $\binom{7}{3} = 35$ است و نمونه‌هایی میانگین را به طور

دقیق برآورد می‌کنند که مجموع اعضای آن‌ها برابر ۱۲ باشد که این نمونه‌ها

عبارت‌اند از:

$$\{1, 4, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{1, 5, 6\}$$

اگر پیشامد مورد نظر را با A نمایش دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی - صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۰)

۳۵- گزینه «۲»

(غریزانه فاکپاش)

$$\bar{x} = \frac{2\left(\frac{1}{2}x - 4\right) + 2(x - 1) + 3(x + 2) + 1(2x)}{2 + 2 + 3 + 1}$$

$$\Rightarrow 17/5 = \frac{8x - 4}{8} \Rightarrow 8x - 4 = 140 \Rightarrow 8x = 144 \Rightarrow x = 18$$

با قرار دادن $x = 18$ ، داده‌های جدول به صورت زیر درمی‌آید:

$$5, 5, 17, 17, 20, 20, 20, 36$$

تعداد داده‌ها عددی زوج و میانه برابر میانگین دو داده وسط است، پس داریم:

$$\text{میانه} = \frac{17 + 20}{2} = 18/5$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۸۳ و ۸۵)



۳۶- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومصوب)

بیشترین مقدار واریانس و انحراف معیار در صورتی پدید می‌آید که انحراف از میانگین داده‌ها حداکثر مقدار ممکن باشد. کافی است دو داده نزدیک‌ترین فاصله ممکن به یکدیگر را داشته و داده دیگر بیشترین فاصله را از آن‌ها داشته باشد. با توجه به یکسان بودن رقم یکان این سه عدد، می‌توانیم مقادیر ۱۰، ۸۰ و ۹۰ را انتخاب کنیم که در این صورت داریم:

$$\bar{x} = \frac{10 + 80 + 90}{3} = 60$$

$$\sigma^2 = \frac{(10-60)^2 + (80-60)^2 + (90-60)^2}{3} = \frac{2500 + 400 + 900}{3} = \frac{3800}{3}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

۳۷- گزینه «۴»

(فرزانه فاکپاش)

اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های X_i به ترتیب برابر \bar{X} و σ باشد، میانگین و انحراف معیار داده‌های $u_i = 3X_i + 2$ به ترتیب برابر $3\bar{X} + 2$ و 3σ است، پس داریم:

$$\frac{CV_2}{CV_1} = \frac{3\sigma}{3\bar{X} + 2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{3\bar{X}}{3\bar{X} + 2} \Rightarrow 3\bar{X} + 2 = 12\bar{X}$$

$$\Rightarrow 9\bar{X} = 2 \Rightarrow \bar{X} = \frac{2}{9}$$

$$\bar{u} = 3\bar{X} + 2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۶ و ۹۷)

۳۸- گزینه «۴»

(سیرمحمد رضا حسینی خرد)

ابتدا داده‌ها را بدون در نظر گرفتن داده a به صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

$$4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 13, 13, 14, 16, 17$$

با افزودن داده a ، تعداد داده‌ها برابر ۱۲ داده شده و دو داده وسط، داده‌های ششم و هفتم هستند. چون یکی از این دو داده قطعاً ۸ و میانه داده‌ها نیز ۸ است، پس a نیز لزوماً برابر ۸ خواهد بود و در نتیجه داریم:

$$Q_1 = \frac{4 + 5 + 6}{2} = 5.5, \quad Q_3 = \frac{13 + 13 + 14}{2} = 13.5$$

بنابراین داده‌های ۶، ۷، ۸، ۸، ۱۲، ۱۳ درون جعبه قرار می‌گیرند. برای این داده‌ها داریم:

$$\bar{x} = \frac{6 + 7 + 8 + 8 + 12 + 13}{6} = 9$$

$$\sigma^2 = \frac{(-3)^2 + (-2)^2 + 2(-1)^2 + 3^2 + 4^2}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۸۴ تا ۹۸)

۳۹- گزینه «۱»

(رضا عباسی اصل)

طبق رابطه احتمال شرطی داریم:

$$P(A' | B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B) = P(A' | B) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(B | A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{3}}{P(A')} \Rightarrow P(A') = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)



۴۰- گزینه «۳»

(مهری نیک زار)

فرض کنید A پیشامد هم رنگ نبودن دو مهره و B_1, B_2, B_3 به ترتیب پیشامدهای انتخاب کیسه اول، دوم و سوم باشند. در این صورت داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} + \frac{1}{3} \times \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} + \frac{1}{3} \times \frac{\binom{5}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{8}{15} + \frac{6}{10} + \frac{5}{15} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{44}{30}$$

طبق قانون بیز داریم:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{8}{15}}{\frac{1}{3} \times \frac{44}{30}} = \frac{4}{11}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

آمار و احتمال - سوالات آشنا

۴۱- گزینه «۱»

(کتاب آبی)

اگر پیشامدهای موفقیت در آزمون‌های اول و دوم را به ترتیب با A و B نمایش

$$P(A) = 0/7 \text{ و } P(B) = 0/6 \quad \text{دهیم، داریم:}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0/8 = \frac{P(A \cap B)}{0/7}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0/56$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0/7 + 0/6 - 0/56 = 0/74$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۴۲- گزینه «۴»

(کتاب آبی)

مجموع دو تاس بیش تر از ۴: A

مجموع دو تاس کوچک تر یا مساوی ۴: A'

$$A' = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (1,3), (3,1)\}$$

بنابراین:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6}{36} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\text{اگر } B \text{ پیشامد رو آمدن سکه باشد، آن گاه } P(B) = \frac{1}{2}$$

چون A و B مستقل هستند، داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

۴۳- گزینه «۲»

(کتاب آبی)

گروه نامعلوم را X می‌نامیم. می‌دانیم که مجموع تمام زاویه‌ها در نمودار دایره‌ای

 360° است، پس:

$$\alpha_X + \alpha_O + \alpha_{AB} + \alpha_B + \alpha_A = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_X + 35^\circ + 100^\circ + 75^\circ + 70^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_X = 80^\circ$$

اگر فراوانی دسته‌ها را با f و تعداد کل داده‌ها را با n نمایش دهیم، داریم:

$$\alpha_X = \frac{f_X}{n} \times 360^\circ \Rightarrow 80^\circ = \frac{f_X}{n} \times 360^\circ \Rightarrow n = 144 \quad \text{بنابراین:}$$

$$\alpha_B = \frac{f_B}{n} \times 360^\circ \Rightarrow 75^\circ = \frac{f_B}{144} \times 360^\circ \Rightarrow f_B = 30$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)



۴۴- گزینه «۳»

(کتاب آبی)

$$\rightarrow \text{حذف داده‌های } ۸ \times \alpha = ۸\alpha \text{ مجموع } ۸ \text{ داده اولیه } ۱۲, ۱۴, ۱۸$$

$$\rightarrow \text{برابر کردن داده } ۸\alpha - (۱۸ + ۱۴ + ۱۲) = ۸\alpha - ۴۴ = \text{مجموع } ۵ \text{ داده}$$

$$= ۱۶\alpha - ۸۸ = (۸\alpha - ۴۴) \times ۲ = \text{مجموع } ۵ \text{ داده در حالت جدید}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۶\alpha - ۸۸}{۵} = \text{میانگین } ۵ \text{ داده در حالت جدید} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{۱۶\alpha - ۸۸}{۵} = \alpha + ۱۱ \Rightarrow ۱۶\alpha - ۸۸ = ۵\alpha + ۵۵$$

$$\Rightarrow ۱۱\alpha = ۱۴۳ \Rightarrow \alpha = ۱۳$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۸۴ و ۸۵)

۴۵- گزینه «۳»

(کتاب آبی)

اگر داده‌ها را با X_1, \dots, X_{31} نشان دهیم آن‌گاه:

$$X_{۱۶} = \text{میان} \Rightarrow \text{تعداد داده‌ها} = ۳۱$$

$$۱۵ = \text{تعداد داده‌ها در نیمه اول یا در نیمه دوم}$$

$$\Rightarrow Q_1 = X_8, Q_3 = X_{24}$$

$$\frac{X_1 + \dots + X_7}{7} = ۱۲ \Rightarrow X_1 + \dots + X_7 = ۸۴$$

$$\frac{X_{25} + \dots + X_{31}}{7} = ۲۱ \Rightarrow X_{25} + \dots + X_{31} = ۱۴۷$$

$$\frac{X_8 + \dots + X_{24}}{۱۷} = ۱۵ \Rightarrow X_8 + \dots + X_{24} = ۲۵۵$$

$$\bar{X} = \frac{(X_1 + \dots + X_7) + (X_8 + \dots + X_{24}) + (X_{25} + \dots + X_{31})}{31}$$

$$= \frac{۸۴ + ۲۵۵ + ۱۴۷}{31} = \frac{۴۸۶}{31} \approx ۱۵.۶۷$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۷ و ۹۸)

۴۶- گزینه «۳»

(کتاب آبی)

نمونه‌گیری خوشه‌ای روشی است که در آن واحدهای نمونه‌گیری اولیه در جامعه، گروه‌ها یا خوشه‌ها باشند که در مثال گزینه «۳» واحدهای نمونه‌گیری کلاس‌ها هستند. در حالی که روش نمونه‌گیری در گزینه «۱» تصادفی ساده، و در گزینه «۲» طبقه‌ای و در گزینه «۴» سامانمند است.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی - صفحه‌های ۱۰۵ و ۱۰۶)

۴۷- گزینه «۲»

(کتاب آبی)

در این بررسی میانگین قد دانشجویان نمونه اندازه‌گیری می‌شود و روش جمع‌آوری داده‌ها، از طریق مشاهده است. پس از روش استفاده از دادگان استفاده نکرده‌ایم.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی - صفحه‌های ۱۱۳ و ۱۱۴)

۴۸- گزینه «۳»

(کتاب آبی)

می‌دانیم که پارامتر میانگین جامعه برابر است با:

$$\mu = \frac{۰+۱+۲+\dots+N}{N+1} = \frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N+1} = \frac{N}{2}$$

حال با توجه به نمونه موجود، مقدار آماره برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۴+۶+۲+۵+۸}{۵} = \frac{۲۵}{۵} = ۵$$

پس برآورد نقطه‌ای ما از پارامتر جامعه یعنی $\frac{N}{2}$ ، برابر است با مقدار آماره نمونه

یعنی ۵، پس برآورد ما از N برابر است با:

(آمار و احتمال - آمار استنباطی - صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۱)

۴۹- گزینه «۴»

(کتاب آبی)

با توجه به رابطه انحراف معیار برآورد و اندازه نمونه داریم:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow ۸/۱ = \frac{\sigma}{\sqrt{۲۰۰}} \Rightarrow \sigma = ۱۰\sqrt{2} \times ۸/۱ = ۸۱\sqrt{2}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = ۳ \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{m}} = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{۸۱\sqrt{2}}{\sqrt{m}} = ۳ \Rightarrow \sqrt{m} = ۲۷\sqrt{2} \Rightarrow m = ۱۴۵۸$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی - صفحه ۱۲۱)

۵۰- گزینه «۲»

(کتاب آبی)

$$n = ۸۱, \quad \bar{x} = ۳۰, \quad \sigma = ۴$$

$$|\mu - \bar{x}| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow |\mu - 30| \leq \frac{2 \times 4}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی - صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲)



۵۳- گزینه «۳»

(اشکال ولی زاده)

مقاومت‌های 48Ω و 16Ω با هم موازی بوده و مقاومت معادل این دو با مقاومت 12Ω متوالی است و مقاومت جدید با مقاومت 8Ω موازی خواهد بود.

$$R' = \frac{48 \times 16}{48 + 16} = 12\Omega, \quad R'' = 12 + 12 = 24\Omega$$

$$R_{eq} = \frac{24 \times 8}{24 + 8} = 6\Omega$$

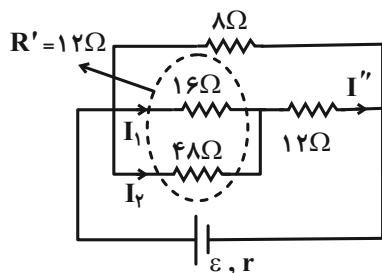
$$I_T = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow I_T = \frac{28}{6 + 1} = 4A$$

$$V'' = V_T \Rightarrow R'' I'' = R_{eq} \times I_T \Rightarrow 24 \times I'' = 6 \times 4$$

$$\Rightarrow I'' = 1A \Rightarrow V_1 = V_T \Rightarrow R_1 I_1 = R_T I_T$$

$$\xrightarrow{I_1 + I_T = 1A} I_1 = \frac{3}{4} A$$

$$P = R I^2 \Rightarrow P = 16 \times \frac{9}{16} = 9W$$



(فیزیک ۲- پیران الکتریکی و مدارهای پیران مستقیم- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)

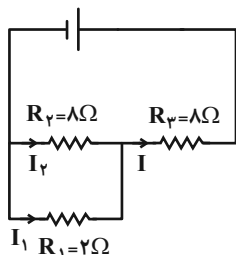
۵۴- گزینه «۴»

(اشکال ولی زاده)

با توجه به موازی بودن دو مقاومت R_1, R_2 نسبت جریان‌های عبوری از دو مقاومت را می‌یابیم:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2 \Rightarrow 2I_1 = 8I_2 \Rightarrow I_1 = 4I_2 \quad (1)$$

$$I_1 + I_2 = I \xrightarrow{(1)} 4I_2 + I_2 = I \Rightarrow I_2 = \frac{I}{5}, \quad I_1 = \frac{4}{5} I$$



فیزیک (۲)

۵۱- گزینه «۱»

(معصومه شریعت‌نابری)

بیشترین توان خروجی در حالتی است که $r = R$ باشد، در این صورت داریم:

$$P_{max} = \frac{\varepsilon^2}{4r} \Rightarrow 48 = \frac{(12)^2}{4r} \Rightarrow r = \frac{3}{4} \Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \xrightarrow{r=R} I = \frac{\varepsilon}{2r} \Rightarrow I = \frac{12}{2 \times \frac{3}{4}} = 8A$$

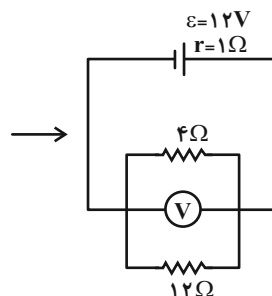
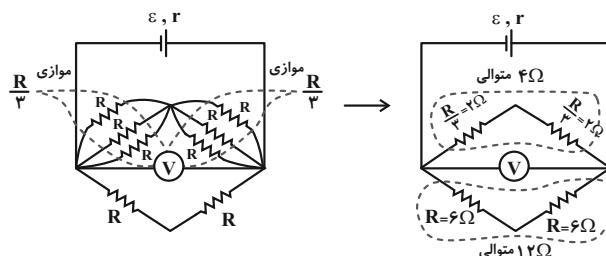
$$P = r I^2 = \frac{3}{4} \times (8)^2 = 48W$$

(فیزیک ۲- پیران الکتریکی و مدارهای پیران مستقیم- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۰)

۵۲- گزینه «۴»

(معصومه شریعت‌نابری)

تمام ۶ مقاومت قسمت بالای ولت‌سنج را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم:



$$R_{eq} = \frac{4 \times 12}{4 + 12} = \frac{48}{16} = 3\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R_{eq}} = \frac{12}{1 + 3} = 3A \Rightarrow V = R_{eq} I = 3 \times 3 = 9V$$

(فیزیک ۲- پیران الکتریکی و مدارهای پیران مستقیم- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

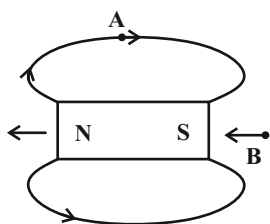


۵۷- گزینه «۲»

(عبدالرضا امینی نسب)

می‌دانیم خطوط میدان مغناطیسی بیرون آهنربا از قطب N آهنربا خارج و به قطب S آهنربا وارد می‌شوند. ناحیه X، قطب N آهنرباست.

از طرفی جهت عقربه مغناطیسی در هر نقطه مماس بر خط میدان در همان نقطه است.

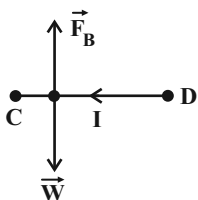


(فیزیک ۲- مغناطیس- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۸)

۵۸- گزینه «۴»

(عبدالرضا امینی نسب)

نیروی وزن سیم به سمت پایین به سیم وارد می‌شود، بنابراین نیروی مغناطیسی وارد بر سیم باید به سمت بالا باشد تا سیم در حالت تعادل بماند. طبق قاعده دست راست، جریان سیم از D به C می‌باشد، بنابراین باتری B باید در مدار قرار گیرد.



اکنون می‌توانیم جریان مدار را بیابیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} m &= 4g = 4 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ L &= 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m} \\ B &= 0.5 \text{ T} \\ \theta &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_B = W \Rightarrow BIL = mg$$

$$\Rightarrow I \times 0.2 \times 0.5 = 4 \times 10^{-3} \times 10 \Rightarrow I = \frac{4 \times 10^{-2}}{10^{-1}} = 0.4 \text{ A}$$

در نهایت با توجه به قانون اهم داریم:

$$V = RI = 10 \times 0.4 = 4 \text{ V}$$

(فیزیک ۲- مغناطیس- صفحه‌های ۹۱ تا ۹۴)

با توجه به رابطه توان مصرفی مقاومت داریم:

$$P = RI^2 \Rightarrow \frac{P_3}{P_1} = \frac{R_3 I_1^2}{R_1 I_1^2} = \frac{8 \times I_1^2}{2 \times \frac{16}{25} I_1^2} \Rightarrow \frac{P_3}{P_1} = \frac{25}{4}$$

(فیزیک ۲- پیران الکتریکی و مدارهای پیران مستقیم- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)

۵۵- گزینه «۴»

(اشکان ولی‌زاده)

توان مصرفی مقاومت را برای هر گزینه محاسبه می‌کنیم:

$$P_1 = \frac{V^2}{R} = \frac{(0 - (-20))^2}{3} = \frac{400}{3} \text{ W}$$

$$P_2 = \frac{V^2}{R} = \frac{(30 - 0)^2}{2} = \frac{900}{2} = 450 \text{ W}$$

$$P_3 = \frac{V^2}{R} = \frac{(10 - (-10))^2}{3} = \frac{400}{3} \text{ W}$$

$$P_4 = \frac{(30 - (-10))^2}{2} = \frac{1600}{2} = 800 \text{ W}$$

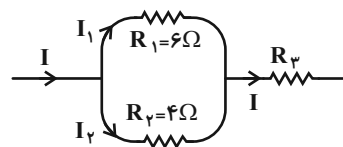
بنابراین: $P_4 > P_2 > P_1 = P_3$

(فیزیک ۲- پیران الکتریکی و مدارهای پیران مستقیم- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۰)

۵۶- گزینه «۱»

(اشکان ولی‌زاده)

ابتدا با توجه به موازی بودن مقاومت‌های R_1 و R_3 رابطه بین جریان عبوری از دو مقاومت را می‌یابیم:



$$V_1 = V_3 \Rightarrow R_1 I_1 = R_3 I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{2}{3} I_2 \Rightarrow \frac{2}{3} I_2 + I_2 = I$$

$$I_2 = \frac{3}{5} I \Rightarrow I_1 = \frac{2}{5} I$$

$$P_3 = \frac{125}{100} P_1 \Rightarrow R_3 I^2 = \frac{125}{100} \times 6 \times \frac{4}{25} I^2 \Rightarrow R_3 = 1.2 \Omega$$

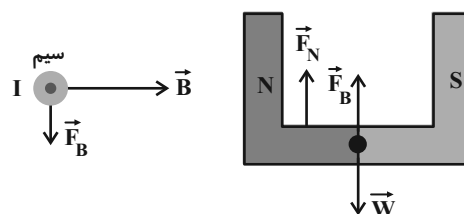
(فیزیک ۲- پیران الکتریکی و مدارهای پیران مستقیم- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)



۵۹- گزینه «۳»

(عبدالرضا امینی نسب)

بنا به قاعده دست راست، نیروی وارد بر سیم CD واقع در میدان مغناطیسی به سمت پایین است، واکنش این نیرو به آهنربا و رو به بالا وارد می شود.



عدد \vec{F}_B باید بزرگتر شود، تا عدد ترازو کاهش یابد، بنابراین باید مقاومت رئوستا را کاهش دهیم تا مطابق قانون اهم جریان عبوری از سیم افزایش یابد، در نتیجه نیروی وارد بر سیم (طبق رابطه $F_B = BIl \sin \alpha$) افزایش یابد و واکنش این نیرو به آهنربا نیز افزایش یافته و عدد ترازو (\vec{F}_N) کمتر شود.

(فیزیک ۲- مغناطیس- صفحه های ۹۱ و ۹۴)

۶۰- گزینه «۱»

(اشکان ولی زاده)

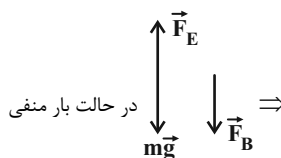
سه نیروی وزن، نیروی الکتریکی و مغناطیسی بر ذره اثر می گذارند:

$$mg = 2 \times 10^{-3} \times 10 = 2 \times 10^{-2} = 0.02 \text{ N}$$

$$F_E = E|q| = 10^3 \times |q| = 1000|q|$$

$$F_B = |q|vB = 2 \times 100 \times |q| = 200|q|$$

با توجه به اینکه برآیند نیروها صفر است و بزرگی نیروی مغناطیسی از بزرگی نیروی الکتریکی کوچکتر است، بنابراین برای تعادل باید نیروی مغناطیسی هم جهت نیروی وزن باشد. بنابراین بار ذره منفی خواهد بود.



$$F_E = mg + F_B \Rightarrow 1000|q| = 0.02 + 200|q|$$

$$\Rightarrow |q| = 25 \times 10^{-6} \text{ C} \Rightarrow q = -25 \mu\text{C}$$

(فیزیک ۲- مغناطیس- صفحه های ۸۹ و ۹۰)

۶۱- گزینه «۲»

(عبدالرضا امینی نسب)

ابتدا به کمک رابطه $L = N(2\pi r)$ تعداد دور پیچه را می یابیم. داریم:

$$L = N2\pi r \Rightarrow 314 = 2 \times 3.14 \times 5 \times N \Rightarrow N = 10$$

با جایگذاری در رابطه $B = \frac{\mu_0 NI}{2r}$ می توان جریان را محاسبه کرد.

$$2\pi \times 10^{-5} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times I}{2 \times 0.05}$$

$$I = \frac{2\pi \times 10^{-5} \times 0.05}{4\pi \times 10^{-7} \times 10} = 0.05 \text{ A} = 50 \text{ mA}$$

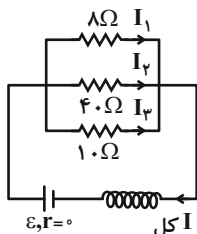
(فیزیک ۲- مغناطیس- صفحه های ۹۷ و ۹۹)

۶۲- گزینه «۱»

(پونا رستمی)

ابتدا به کمک رابطه $P = RI^2$ جریان عبوری از مقاومت 40Ω اهمی را به دست می آوریم.

$$P_P = R_P I_P^2 \xrightarrow{P_P = 40 \text{ W}, R_P = 40 \Omega} I_P = 1 \text{ A}$$



از طرفی جریان در مقاومت های موازی به نسبت عکس اندازه مقاومت ها تقسیم می شود.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{I_1}{I_2} \Rightarrow \frac{40}{8} = \frac{I_1}{1} \Rightarrow I_1 = 5 \text{ A}$$

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{I_3}{I_2} \Rightarrow \frac{40}{10} = \frac{I_3}{1} \Rightarrow I_3 = 4 \text{ A}$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 + I_3 = 5 + 1 + 4 = 10 \text{ A}$$

و در نهایت بزرگی میدان مغناطیسی سیملوله برابر است با:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} \xrightarrow{N=50, I=10 \text{ A}, L=10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}} B = \frac{12 \times 10^{-7} \times 500 \times 10}{10^{-1}}$$

$$= 600 \times 10^{-4} \text{ T} = 600 \text{ G}$$

(فیزیک ۲- مغناطیس- صفحه های ۶۷ و ۶۸، ۷۷ و ۱۰۱)



۶۳- گزینه «۴»

(بهنام رستمی)

چون میله‌ها از جنس ماده فرومغناطیسی هستند، آهنربا می‌شوند و از یکدیگر دور می‌شوند و از آنجا که وقتی کلید باز می‌شود، میله‌ها به محل اولیه باز می‌گردند، نتیجه این می‌شود که میله‌ها از جنس فرومغناطیسی نرم بوده مانند آهن.

(فیزیک ۲- مغناطیس- صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)

۶۴- گزینه «۳»

(معصومه شریعت‌ناصری)

بردار میدان مغناطیسی با محور y (نیم‌خط عمود بر سطح حلقه) زاویه 30° می‌سازد.

$$\vec{B} = \vec{i} + \sqrt{3} \vec{j}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$B = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\Phi = AB \cos \alpha = 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ Wb}$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب - صفحه‌های ۱۱۰ و ۱۱۱)

۶۵- گزینه «۴»

(معصومه شریعت‌ناصری)

طبق رابطه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار و یک میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$F_B = |q| v B \sin \alpha \Rightarrow F_B = F_{\max} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{F_B}{F_{\max}} = \frac{0.1 F_{\max}}{F_{\max}} = 0.1 \Rightarrow \alpha = 5.7^\circ$$

با توجه به کاهش زاویه α داریم:

$$5.7^\circ - 16^\circ = -10.3^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{F'_B}{F_{\max}} \Rightarrow 0.1 = \frac{F'_B}{F_{\max}} \Rightarrow F'_B = 0.1 F_{\max}$$

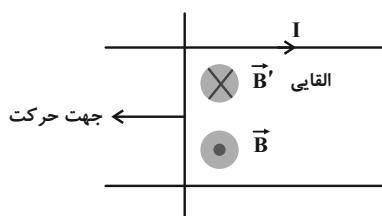
$$\text{درصد تغییرات} = \frac{F'_B - F_B}{F_B} \times 100 = \frac{-0.1 F_{\max}}{0.1 F_{\max}} \times 100 = -100\%$$

(فیزیک ۲- مغناطیس- صفحه‌های ۸۹ و ۹۰)

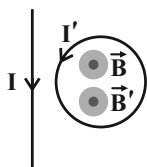
۶۶- گزینه «۴»

(معصومه شریعت‌ناصری)

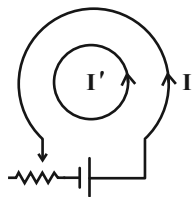
در شکل گزینه (۱) با حرکت میله به سمت چپ، سطح مدار افزایش می‌یابد و شار مغناطیسی میدان برون‌سو افزایش یافته و جریان القایی به‌وجود می‌آید که طبق قانون لنز باید میدان القایی آن درون‌سو باشد تا با افزایش شار مخالفت کند. بنابراین جریان القایی ساعتگرد است.



در شکل گزینه (۲) میدان سیم I در محل حلقه برون‌سو و در حال کاهش است، طبق قانون لنز میدان مغناطیسی القایی باید برون‌سو باشد، بنابراین جریان القایی پادساعتگرد است.



در شکل گزینه (۳) با حرکت لغزنده به سمت چپ مقاومت رتوستا افزایش و جریان مدار کاهش می‌یابد. در این‌صورت جریان القایی در حلقه میانی همسو با جریان اصلی مدار است تا با کاهش شار مخالفت کند یعنی باید پادساعتگرد باشد.



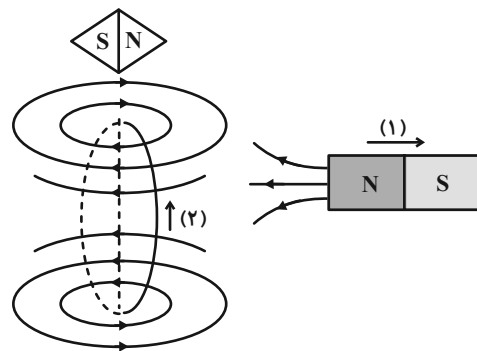
(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب - صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)



۶۷- گزینه «۴»

(بهنام رستمی)

نوک N عقربه مغناطیسی جهت خطوط میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد. به کمک قاعده دست راست جهت جریان القایی حلقه در جهت (۲) تعیین می‌شود. از طرفی طبق شکل زیر چون جهت میدان مغناطیسی درون حلقه هم جهت با میدان مغناطیسی آهنربا است بنابراین شار در حال کاهش است یعنی آهنربا در حال دور شدن از حلقه (جهت ۱) است.



(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب - صفحه‌های ۸۴ تا ۱۱۷)

۶۸- گزینه «۴»

(معصومه شریعت‌نابری)

معادله جریان متناوب برابر است با:

$$I = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t$$

اگر در $t = \frac{1}{800} \text{ s}$ جریان را $2\sqrt{2} \text{ A}$ جایگذاری کنیم، داریم:

$$2\sqrt{2} = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{1}{800}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{400T}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{400T} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{1}{100} \text{ s}$$

اولین لحظه‌ای که جریان بیشینه می‌شود لحظه $\frac{T}{4}$ است، پس:

$$t = \frac{1}{400} \text{ s}$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب - صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۵)

۶۹- گزینه «۳»

(معصومه شریعت‌نابری)

طبق متن کتاب درسی موارد «الف»، «ب» و «ج» صحیح هستند و مورد «د» نادرست است.

بررسی مورد نادرست:

(د) یکی از مزیت‌های مهم توزیع توان الکتریکی ac آن است که افزایش و کاهش ولتاژ ac بسیار آسان‌تر از ولتاژ dc است.

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب - صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۶)

۷۰- گزینه «۲»

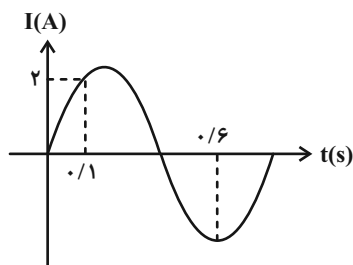
(اشکان ولی‌زاده)

با استفاده از نمودار ابتدا دوره تناوب را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{3T}{4} = 0.6 \Rightarrow T = 0.8$$

$$I = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow 2 = I_m \sin \frac{2\pi}{0.8} \times 0.1$$

$$I_m = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ A}$$



$$P = RI^2 \Rightarrow P = 5 \times 8 = 40 \text{ W}$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب - صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۵)



شیمی (۲)

۷۱- گزینه «۴»

(رسول عابرینی زواره)

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: پلی آمیدها در شرایط مناسب با آب واکنش می‌دهند و به دی‌اسید و دی‌آمین سازنده تبدیل می‌شوند.

گزینه «۲»: اسید سازنده اتیل بوتانوات، بوتانوئیک اسید با فرمول مولکولی $C_4H_8O_2$ می‌باشد.

گزینه «۳»: عامل آمیدی از واکنش اسید آلی با آمین به دست می‌آید.

گزینه «۴»: الکل‌ها و اسیدها حداکثر تا ۵ کربن در آب محلول اند.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر- صفحه‌های ۱۱۰ و ۱۱۷)

۷۲- گزینه «۴»

(پویا رسنگاری)

فرض می‌کنیم دمای محلول اولیه ۳ لیتری پس از انحلال پتاسیم اکسید به اندازه $\Delta\theta$ افزایش یافته و به $20 + \Delta\theta$ درجه سلسیوس می‌رسد. پس از آن محلول

موردنظر با یک محلول ۱۰ لیتری با دمای $65^\circ C$ مخلوط و محلولی با دمای

$56^\circ C$ به دست آمده است با توجه به دمای محلول نهایی و چگالی آب که $1 \frac{kg}{L}$

است مقدار $\Delta\theta$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\theta_{\text{نهایی}} = \frac{m_1\theta_1 + m_2\theta_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{3000 \times (20 + \Delta\theta) + 10000 \times 65}{13000} = 56$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = 6$$

پس دمای محلول ۳ لیتری پس از انحلال پتاسیم اکسید به $26^\circ C$ درجه سلسیوس

می‌رسد. در مرحله بعد مقدار گرمایی که طی انحلال پتاسیم اکسید آزاد شده است را

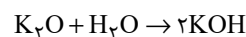
محاسبه کرده و پس از آن مقدار مول حل شده از این ماده را به دست می‌آوریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = 3000 \times 4 / 2 \times 6 = 75600 J = 75 / 6 kJ$$

$$? \text{ mol } K_2O = 75 / 6 kJ \times \frac{1 \text{ mol } K_2O}{70 kJ \text{ انرژی}}$$

$$= 1 / 08 \text{ mol } K_2O$$

پتاسیم اکسید طبق معادله زیر با آب واکنش داده و پتاسیم هیدروکسید تولید می‌شود:



$$? g KOH = 1 / 08 \text{ mol } K_2O \times \frac{2 \text{ mol } KOH}{1 \text{ mol } K_2O} \times \frac{56 g KOH}{1 \text{ mol } KOH}$$

$$= 120 / 96 \approx 12 g KOH$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم- صفحه‌های ۵۸ و ۶۳ و ۷۲)

۷۳- گزینه «۳»

(کامران کیومرثی)

تمامی عبارت‌های صورت سؤال درست هستند.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر- صفحه ۱۱۹)

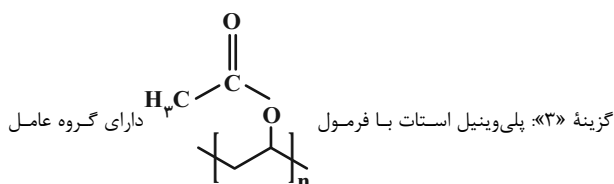
۷۴- گزینه «۴»

(منصور سلیمانی ملکان)

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: کولار یک پلی آمید است. این پلیمر از فولاد هم جرم خود پنج برابر مقاومتر است.

گزینه «۲»: استر آناناس اتیل بوتانوات نام دارد که از واکنش اتانول و بوتانوئیک اسید به دست می‌آید.



استری است ولی چون در تشکیل این پلیمر واکنش استری شدن نقش نداشته است پس پلی استر نیست برای تشکیل این پلیمر پیوند سیر نشده $C=C$ نقش داشته است.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر- صفحه‌های ۱۰۴، ۱۱۳، ۱۱۵ و ۱۱۹)

۷۵- گزینه «۳»

(علی فرزاد تبار)

عبارت‌های (آ)، (ب)، (پ) نادرست‌اند.

عبارت (آ) مواد زیست تخریب‌پذیر به مولکول‌های ساده و کوچک تبدیل می‌شوند.

عبارت (ب) تغییر محسوسی در رنگ لباس ایجاد نمی‌شود.

عبارت (پ) آهنگ تجزیه پلی استرها و پلی آمیدها به ساختار مونومرهای سازنده بستگی دارد.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر- صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۹)



۷۶- گزینه «۱»

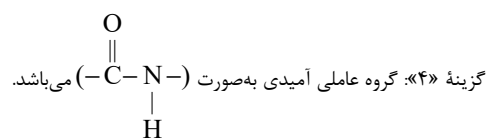
(عباس هنریو)

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: با توجه به اینکه در واحد تکرارشونده پلی استرها چهار اتم اکسیژن وجود دارد. هر اتم اکسیژن دارای چهار الکترون ناپیوندی و در مجموع ۱۶ الکترون ناپیوندی در واحد تکرارشونده وجود دارد.

گزینه «۲»: فورمیک اسید و متانول به ترتیب کربوکسیلیک اسید و الکل یک عاملی است. در حالی که مونومرهای سازنده یک پلی استر باید کربوکسیلیک اسید و الکل دو عاملی باشند.

گزینه «۳»: بسیاری از پلی آمیدها، مانند پلی آمیدهای موجود در پوست، مو، ناخن و ... طبیعی هستند.

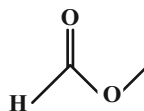


(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان تا پذیرش - صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

۷۷- گزینه «۱»

(رسول عابدینی زواره)

ساده ترین الکل متانول (CH_3OH) و ساده ترین اسید آلی فورمیک اسید (HCOOH) است و استر حاصل از واکنش ایندو ترکیب HCOOCH_3 می باشد.



$$\text{CH}_3\text{OH} = 12 + 3(1) + 16 + 1 = 32 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{HCOOH} = 1 + 12 + 2(16) + 1 = 46 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$46 - 32 = 14$$

اختلاف جرم اسید و الکل سازنده:

جرم مولی اسید، ۱۴ گرم بیشتر است.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان تا پذیرش - صفحه‌های ۱۰۹، ۱۱۰ و ۱۱۲)

۷۸- گزینه «۴»

(یاسر علیشانی)

فرمول مولکولی کربوکسیلیک اسید تک عاملی به صورت $\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2$ و الکلتک عاملی به صورت $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}\text{O}$ می باشد بنابراین داریم:

$$\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2 = 2(\text{C}_n\text{H}_{2n+2}\text{O}) - 60$$

$$14n + 32 = 2(14n + 2 + 16) - 60 \Rightarrow n = 4$$

$$\text{جرم مولی الکل} = \text{C}_n\text{H}_{2n+2}\text{O} = 14n + 2 + 16$$

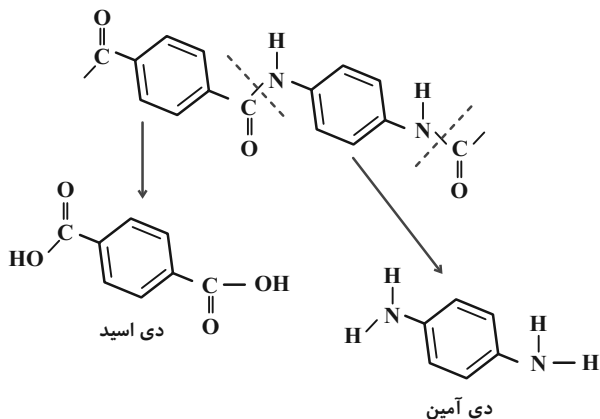
$$= (14 \times 4) + 2 + 16 = 74$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان تا پذیرش - صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

۷۹- گزینه «۱»

(مرتضی رضائی زاده)

با توجه به ساختار پلی آمید داده شده، ساختار دی آمین و دی اسید تشکیل دهنده آن به صورت زیر است:



(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان تا پذیرش - صفحه‌های ۱۱۴ و ۱۱۵)

۸۰- گزینه «۴»

(رسول عابدینی زواره)

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: در ساختار کلسترول اکسیژن متصل به هیدروژن (گروه هیدروکسیل) وجود دارد، بنابراین می تواند پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.



با توجه به مقدار n می توان گفت آلکین مورد نظر همان پروپین است ابتدا شمار مول های پروپین مصرف شده را محاسبه کرده و پس از آن سرعت متوسط واکنش را به دست می آوریم:

$$? \text{ mol } C_3H_4 = \frac{1}{2} g H_2O \times \frac{1 \text{ mol } H_2O}{18 g H_2O} \times \frac{1 \text{ mol } C_3H_4}{2 \text{ mol } H_2O} = 0.02 \text{ mol } C_3H_4$$

$$\bar{R} = \frac{\bar{R} C_3H_4}{1} = \frac{0.02}{1 \times 30} = 0.001 \text{ mol/s}$$

در مرحله بعد ارزش سوختی گاز پروپین را با توجه به مقدار انرژی آزاد شده محاسبه می کنیم:

$$\text{ارزش سوختی} = \frac{\text{مقدار انرژی آزاد شده}}{\text{جرم ماده مصرف شده}} = \frac{392 \text{ kJ}}{0.02 \text{ mol } C_3H_4 \times \frac{40 g C_3H_4}{1 \text{ mol } C_3H_4}} = 49 \text{ kJ/g}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم- صفحه های ۷۰، ۷۱ و ۸۴ تا ۸۸)

۸۲- گزینه «۴»

(روزبه رضوانی)

گزینه «۱»: شاخ و پشم گوسفند از پلیمرهایی به نام پلی آمید ساخته می شوند که ساختار آن ها H, O, N و C وجود دارد اما پنبه از پلیمری به نام سلولز ساخته می شود که پلی استر است و در ساختار آن اتم N وجود ندارد.

گزینه «۲»: پلی آمید و پلی استرها در شرایط مناسب با آب واکنش می دهند و به مونومرهای سازنده تبدیل می شوند این پلیمرها زیست تخریب پذیرند.

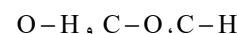
گزینه «۳»: پلیمرهای حاصل از هیدروکربن های سیر نشده به انجام واکنش تمایلی ندارند و از این رو پوشاک و پوشش های تهیه شده از این مواد در طبیعت تجزیه نمی شوند.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان تاپزیر- صفحه های ۱۰۰ و ۱۱۴ تا ۱۱۹)

گزینه «۲»: از آنجائیکه این ترکیب یک گروه الکلی دارد با یک کربوکسیلیک اسید، تولید استر می کند.

گزینه «۳»: با توجه به وجود گروه هیدروکسیل این ترکیب یک الکل محسوب می شود و چون پیوند دوگانه کربن - کربن دارد الکل سیر نشده است و با توجه به اینکه حلقه بنزنی ندارد این ترکیب آروماتیک نمی باشد. از طرفی چون تعداد کربن های زیادی دارد در آب نامحلول است.

گزینه «۴»: در ساختار آن چهار نوع پیوند یگانه وجود دارد. پیوندهای $C-C$,

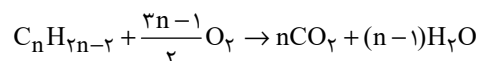


(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان تاپزیر- صفحه های ۱۰۹ و ۱۱۲ تا ۱۱۴)

۸۱- گزینه «۲»

(پویا رستگاری)

معادله سوختن کامل آلکین ها به صورت زیر می باشد:



با به دست آوردن شمار مول های آب و گاز اکسیژن و مقایسه آن ها با یکدیگر می توانیم مقدار n را به دست بیاوریم. براین اساس داریم:

$$? \text{ mol } O_2 = 17/92 LO_2 \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{22/4 LO_2} = 0.18 \text{ mol } O_2$$

$$? \text{ mol } H_2O = 7/2 g H_2O \times \frac{1 \text{ mol } H_2O}{18 g H_2O} = 0.04 \text{ mol } H_2O$$

$$\frac{\text{ضریب استوکیومتری } O_2}{\text{شمار مول } O_2 \text{ مصرف شده}} = \frac{\text{ضریب استوکیومتری } H_2O}{\text{شمار مول } H_2O \text{ تولید شده}}$$

$$\Rightarrow \frac{0.18}{0.04} = \frac{\left(\frac{3n-1}{2}\right)}{n-1} \Rightarrow n = 3$$



$$\Rightarrow \Delta H(N \equiv N) + 3\Delta H(H-H)$$

$$-(6\Delta H(N-H)) = -93 \Rightarrow x + 1308 - 6y = -93$$

$$\Rightarrow x - 6y = -1401$$

از طرفی صورت سوال ذکر کرده است که مجموع میانگین آنتالپی پیوند (N-H) (همان y) و آنتالپی پیوند (N≡N) (همان x) برابر با ۱۳۳۶ کیلوژول بر مول می‌باشد. بنابراین به یک دو معادله دو مجهول می‌رسیم و مقدار عددی مولفه‌های x و y را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x + y = 1336 \\ x - 6y = -1401 \end{cases} \Rightarrow y = 391 \text{ kJ.mol}^{-1}, x = 945 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم- صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

۸۵- گزینه «۳»

(معمیر ذبی)

تنها عبارت سوم نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: الگوی نشان داده شده مربوط به ساختار پلی‌استرها است که از آن‌ها برای تولید الیاف و نخ می‌توان بهره برد.

عبارت دوم: استرها عامل بوی خوش شکوفه‌ها و ... هستند که گروه عاملی آن‌ها با پلی‌استرها یکسان است.

عبارت جمله سوم: برای تهیه پلی‌استرها از دی‌اسیدها (کربوکسیلیک‌اسیدهای دو عاملی) و دی‌الکل‌ها (الکل‌های دو عاملی) استفاده می‌شود.

عبارت چهارم: پلی‌استرها در واکنش با آب (آبکافت) به مونومرهای سازنده‌شان تجزیه می‌شوند.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر- صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۷)

۸۶- گزینه «۱»

(پویا رستگاری)

موارد اول و سوم از میان عبارت‌های داده شده درست می‌باشد.

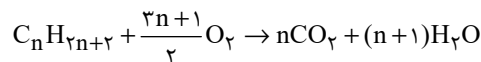
بررسی همه موارد:

• استفاده از قانون هس، از جمله روش‌هایی غیرمستقیم محاسبه ΔH واکنش‌ها است.

(رسول عابرینی زواره)

۸۳- گزینه «۱»

واکنش سوختن کامل آلکان‌ها به صورت زیر است:



$$\bar{R}_{CO_2} = 12 L.s^{-1} \times \frac{1/1 g CO_2}{1 L CO_2} \times \frac{1 mol CO_2}{44 g CO_2} = 0.3 mol.s^{-1}$$

$$\bar{R}_{O_2} = \frac{\Delta n_{O_2}}{\Delta t} = \frac{1440 g O_2 \times \frac{1 mol O_2}{32 g O_2}}{1/5 min \times \frac{60 s}{1 min}} = 0.5 mol.s^{-1}$$

$$\frac{\bar{R}_{O_2}}{3n+1} = \frac{\bar{R}_{CO_2}}{n} \Rightarrow \frac{0.5}{3n+1} = \frac{0.3}{n} \Rightarrow 0.5n = 0.3(3n+1)$$

$$n = 0.9n + 0.3$$

$$0.1n = 0.3 \Rightarrow n = 3$$

آلکان موردنظر C_3H_8 (پروپان) می‌باشد.

$$C_3H_8 = 3(12) + 8(1) = 44 g.mol^{-1}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم- صفحه‌های ۸۳ تا ۹۰)

۸۴- گزینه «۳»

(پویا رستگاری)

در ابتدا آنتالپی پیوند (H-H) را با توجه به واکنش صورت گرفته محاسبه



$$\Delta H(H-H) = \frac{545 kJ}{28 LH_2} \times \frac{22/4 LH_2}{1 mol H_2} = 436 kJ.mol^{-1}$$

در ادامه با توجه به واکنش تولید گاز آمونیاک آنتالپی واکنش به صورت زیر محاسبه



میانگین آنتالپی پیوند (N-H) را y و آنتالپی پیوند (N≡N) را x در نظر می‌گیریم.

$$\Delta H(\text{واکنش}) = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}]$$

$$-[\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$



گزینه «۳»: بوتیل اتانوات، دارای ۲۰ جفت الکترون پیوندی است.

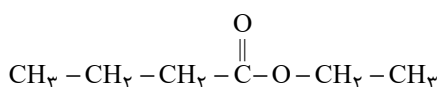
گزینه «۴»: درست، فرمول مولکولی هر دو به صورت $C_6H_{12}O_2$ است.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان تاپزیر - صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۳)

۸۹- گزینه «۲»

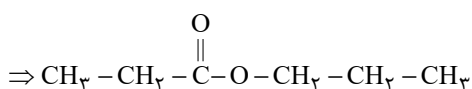
(مرتضی حسن زاده)

- استر سازنده بوی آناناس، اتیل بوتانوات است.



اتیل بوتانوات

$$\%C = \frac{72}{116} \times 100 \approx 62\%$$



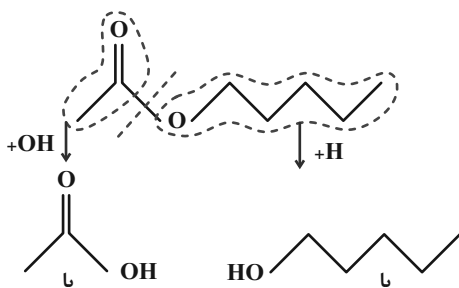
پروپیل پروپانوات

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان تاپزیر - صفحه‌های ۱۰۸ و ۱۱۳)

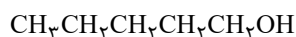
۹۰- گزینه «۱»

(یاسر راش)

شمار اتم‌های کربن الکل سازنده برابر ۵ و شمار اتم‌های کربن اسید سازنده برابر ۲ است.



اسید سازنده
(اتانواتیک اسید)



الکل سازنده
(۱- پنتانول)

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان تاپزیر - صفحه‌های ۱۱۳ و ۱۱۴)

• چون اتانول تعداد اتم‌های کربن کمتری دارد، گرمای حاصل از سوختن یک مول

اتانول، کمتر از گرمای حاصل از سوختن یک مول پروپانول می‌باشد.

• استفاده از قانون هس در شرایطی مقدور است که شرایط همه واکنش‌های انجام شده یکسان باشد.

• چون پایداری آب بیشتر از هیدروژن پراکسید است، از واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن، مولکول‌های آب تولید شده نه هیدروژن پراکسید.

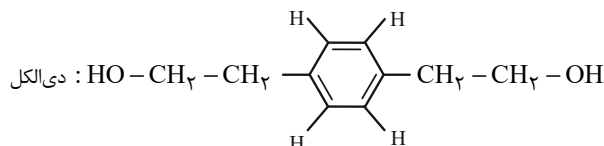
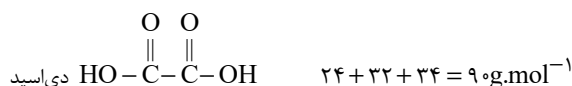
• تعیین آنتالپی واکنش تولید هیدرازین از گازهای هیدروژن و نیتروژن به روش تجربی قابل اندازه‌گیری نیست.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم - صفحه‌های ۷۱ تا ۷۵)

۸۷- گزینه «۳»

(شعر ۳ همایون فر)

از آبکافت پلی‌استرها، دی‌اسید و دی‌الکل حاصل می‌شود.



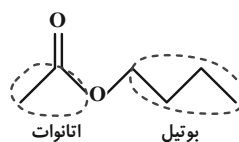
$$10(12) + 14(1) + 2(16) = 166 \text{ g.mol}^{-1} \Rightarrow 166 - 90 = 76 \text{ g.mol}^{-1}$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان تاپزیر - صفحه‌های ۱۱۷)

۸۸- گزینه «۳»

(مرتضی حسن زاده)

گزینه «۱»: استر مورد نظر، بوتیل اتانوات بوده که به اشتباه، اتیل بوتانوات نامگذاری شده است.



گزینه «۲»: الکل A، بوتانول است بنابراین فرمول مولکولی بوتانول به صورت $C_4H_{10}O$ است.

$$\%C = \frac{48}{74} \times 100 \approx 65$$