آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله ششم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۲۷/مهر/۱۴۰۳

دفترچه شماره یک

بودجه‌بندی دروس

حسابان و ریاضیات پایه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	هندسه
ریاضی (۱) فصل ۲ صفحهٔ ۲۸ تا ۴۶ حسابان (۱) فصل ۴ (درس‌های ۱، ۲ و ۳) صفحهٔ ۹۱ تا ۱۰۹ حسابان (۲) فصل ۱ (درس ۲) و فصل ۲ (درس ۱) صفحهٔ ۱۳ تا ۳۴	ریاضی (۱) فصل ۷ (درس ۲ و ۳) صفحهٔ ۱۵۲ تا ۱۷۰ ریاضیات گسسته فصل ۱ (درس ۲ و ۳ تا ابتدای معادلهٔ هم‌نهشتی) صفحهٔ ۹ تا ۲۴	هندسه (۲) فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۹ تا ۱۷ هندسه (۳) فصل ۱ (درس ۲) صفحهٔ ۲۲ تا ۳۱

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه
مجموع	۴۰ سؤال			۷۵ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

AzmoonFree.ir

حسابان و ریاضیات پایه

۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^۴-x^۳+ax^۲+bx+۳$ بر چندجمله‌ای‌های $x-۲$ و $x+۱$ به ترتیب برابر ۵ و ۲ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $ap(x-۱)+bp(۲-x)$ بر $x-۳$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۴ ۳) ۳ ۴) -۵

۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^۶+۳x^۵+ax^۲+bx+۱$ بر چندجمله‌ای $x^۳+۱$ برابر $x^۲+x+۲$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x-a)$ بر $x-b$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶

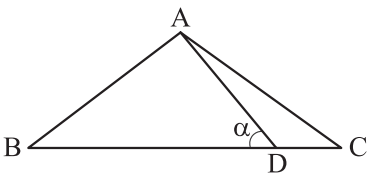
۳- تابع $f(x)=ax^۴+x^۳+(a-۳)x^۲+۳x+۷$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. نمودار کدام تابع از ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $y=f(x+۱)$ ۲) $y=f(x-۱)$ ۳) $y=f(x)+۱$ ۴) $y=f(x)-۱$

۴- تابع $f(x)=\begin{cases} kx+۳ & ;x<۱ \\ -x|x+۱| & ;x\geq ۱ \end{cases}$ اکیداً یکنواست. حدود k کدام است؟

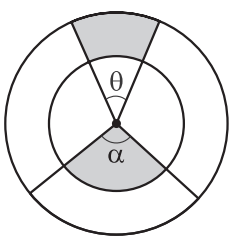
۱) $-۱۰<k<-۳$ ۲) $۳<k<۵$ ۳) $-۱۰<k<۰$ ۴) $-۵\leq k<۰$

۵- در شکل زیر، $AB=AC=۱۲$ و $BD=۱۵$ است. اگر $\tan\alpha=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ باشد، طول پاره‌خط CD کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۶- در شکل زیر، دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های ۶ و ۸ مفروض‌اند. اگر محیط‌ها و مساحت‌های دو ناحیهٔ سایه‌خورده برابر باشند، زاویهٔ α برحسب رادیان کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۷- اگر $\sin\alpha\cos\alpha<۰$ و $\tan\alpha>\cot\alpha$ باشد، زاویهٔ α برحسب رادیان، کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱۳\pi}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۷\pi}{۲۰}$ ۳) $\frac{۳۳\pi}{۲۰}$ ۴) $\frac{۲۹\pi}{۲۰}$

۸- اگر نمودار تابع $y=a+b\sin(\frac{x}{ab})$ را ۳ واحد به بالا انتقال دهیم، از بالا بر خط $y=۸$ و اگر ۵ واحد به پایین انتقال دهیم، از پایین بر خط $y=-۸$ مماس می‌شود. دورهٔ تناوب این تابع کدام است؟

۱) ۸π ۲) ۶π ۳) ۴π ۴) ۱۲π

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

۹- متمم و مکمل زاویهٔ θ به ترتیب زوایای α و β هستند. کدام رابطه همواره برقرار است؟

۱) $\sin\beta+\cos\alpha=0$　　۲) $\cos\beta+\sin\alpha=0$　　۳) $\cos\theta-\cos\beta=0$　　۴) $\sin\theta+\cos\alpha=0$

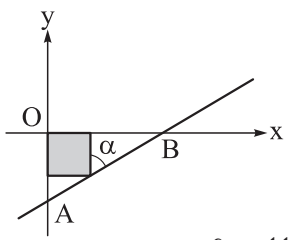
۱۰- حاصل عبارت $P=\frac{2\sin 252^\circ-\cos 198^\circ}{3\cos 162^\circ+\sin 108^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$　　۲) $\frac{3}{4}$　　۳) $-\frac{3}{4}$　　۴) $\frac{1}{2}$

۱۱- برای نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حادهٔ x، رابطهٔ $\sin^4 x-4\cos^4 x=3\sin^2 x\cos^2 x$ برقرار است. حاصل عبارت $P=\frac{3\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) $\frac{2}{3}$　　۴) $\frac{4}{3}$

۱۲- در شکل زیر، مساحت مثلث AOB، $\frac{8}{3}$ برابر مساحت مربع رنگی است. حاصل عبارت $P=\frac{4\sin\alpha\cos\alpha-1}{\cos^2\alpha}$ کدام می‌تواند باشد؟



۱) $\frac{3}{2}$　　۲) ۳

۳) ۲　　۴) $\frac{4}{3}$

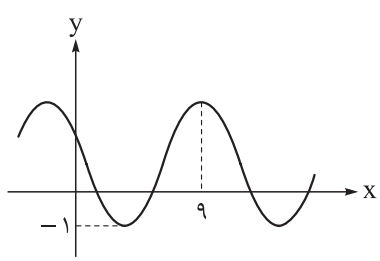
۱۳- به ازای چند عدد طبیعی و یک‌رقمی a، تابع $y=2\sin\frac{ax}{4}$ روی بازهٔ $(\pi,2\pi)$ غیریکنوا است؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

۱۴- اندازهٔ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=2a-1-3\sin\frac{\pi x}{a}$ از اندازهٔ ماکزیمم آن یک واحد بیشتر است. کم‌ترین مقدار تابع $y=\frac{1}{a}f(x)+a$ کدام است؟

۱) $-\frac{13}{12}$　　۲) $-\frac{13}{6}$　　۳) $-\frac{17}{6}$　　۴) $-\frac{17}{12}$

۱۵- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=1+a\sin(b\pi x)$ به صورت زیر است. دورهٔ تناوب تابع $g(x)=\cos(\frac{x}{ab})$ کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{4}$

۲) $\frac{2\pi}{3}$

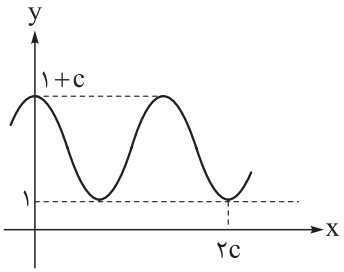
۳) $\frac{\pi}{2}$

۴) $\frac{\pi}{3}$

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

۱۶- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin^{۲}(a\pi x)$ به صورت زیر است. مقدار b کدام است؟



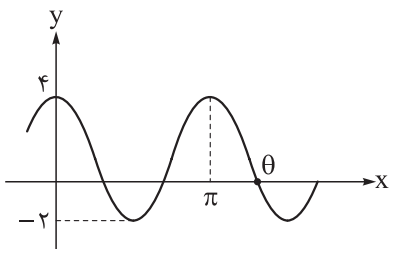
۱) $-۰/۵$

۲) $۰/۷۵$

۳) $-۰/۷۵$

۴) $۰/۵$

۱۷- بخشی از نمودار تابع $f(x)=a+b\cos cx$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $\sin^{۲}۲\theta$ کدام است؟



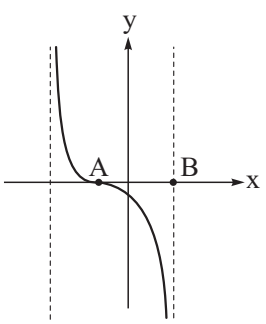
۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۸}{۹}$

۴) $\frac{۴}{۹}$

۱۸- نمودار تابع $y=۱+\tan(ax-\frac{\pi}{۳})$ در یک دورهٔ تناوب به صورت زیر است. اگر طول پاره‌خط AB برابر π باشد، مقدار a کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۲}$

۲) $-\frac{۳}{۴}$

۳) $-\frac{۱}{۴}$

۴) $-\frac{۲}{۳}$

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

ریاضیات گسسته

۱۹- چه تعداد از متغیرهای «مدت‌زمان تأثیر دارو ـ مسافت مسیر پرتاب نیزه ـ تعداد کلاس‌های مدرسه ـ تعداد فرزندان یک خانواده» گسسته هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰- نقاط (a,b) روی منحنی $y=\frac{5x-2}{x+1}$ قرار دارند. اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ باشند، چند نقطه با این ویژگی روی این منحنی قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱- از رابطهٔ $16x\overset{48}{\equiv}12y$ کدام نتیجه را نمی‌توان گرفت؟

۱) $y\overset{4}{\equiv}0$ ۲) $x\overset{3}{\equiv}0$ ۳) $4x\overset{24}{\equiv}3y$ ۴) $3y\overset{12}{\equiv}4x$

۲۲- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $9n+5$ و $7n-4$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۶۱ ۲) ۷۱ ۳) ۸۳ ۴) ۹۷

۲۳- اگر $b\mid a$ و $a\mid c$، کدام نتیجه‌گیری لزوماً درست نیست؟

۱) $a\mid b+c$ ۲) $a\mid b^2+c$ ۳) $a^2\mid b+c$ ۴) $a^2\mid bc$

۲۴- اگر a عددی صحیح و فرد و $a+12$ بر b بخش‌پذیر باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2+b^2+19 بر ۸، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۲۵- اگر a، b و c سه عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشند به طوری که $a^2\mid b^3$ و $b^4\mid c^5$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a^5\mid c^9$ ۲) $a^6\mid c^{11}$ ۳) $a^7\mid b^{10}$ ۴) $a^8\mid c^{15}$

۲۶- چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۴۰ وجود دارد که دارای چهار مقسوم‌علیه طبیعی باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۲۷- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $7\times(15^{43}-18^{43})$ بر عدد ۳۰ چه‌قدر است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۸- تعداد اعداد سه‌رقمی a به طوری که $13^a\overset{17}{\equiv}1$ کدام است؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۷۵ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۲۵

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

هندسه

۲۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر k، دستگاه معادلات $\begin{cases}(k+۳)x+۳y=۹\\ ۴x+(k-۱)y=۶\end{cases}$ فاقد جواب است؟

۱) $\{۳\}$ ۲) $\{-۵\}$ ۳) $\{-۵,-۲\}$ ۴) $\{۴,-۲\}$

۳۰- مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix}۱ & -\tan\theta\\ \tan\theta & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & \tan\theta\\ -\tan\theta & ۱\end{bmatrix}^{-۱}$ کدام است؟

۱) $۲\cos ۲\theta$ ۲) $۲\sin ۲\theta$ ۳) $۲\tan ۲\theta$ ۴) $۲\cot ۲\theta$

۳۱- A و B دو ماتریس وارون‌پذیر ۲×۲اند؛ اگر $A-B=۲AB$، آن‌گاه حاصل $|B^{-۱}-A^{-۱}|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) صفر

۳۲- اگر $A-B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}$، $A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix}-۵ & ۳\\ ۷ & -۴\end{bmatrix}$ و $B^{-۱}A^{-۱}=\begin{bmatrix}۴ & ۷\\ ۷ & ۱۲\end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲+B^۲$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) صفر

۳۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & |A|\\ -۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & -۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان $A-I$ کدام است؟

۱) $-۰/۵$ ۲) $۰/۵$ ۳) $۱/۵$ ۴) $-۱/۵$

۳۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & -۱ & ۲\\ ۰ & ۲ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۳ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه با فرض $ACA+BCB=ACB+BCA+I$، دترمینان ماتریس C کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

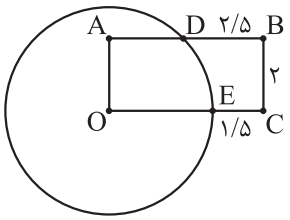
۳۵- اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۲a & ۴b & ۶c\\ ۳a^۲ & ۶b^۲ & ۹c^۲\end{bmatrix}$ برابر k باشد، دترمینان ماتریس $B=\begin{bmatrix}۹bc & ۶ac & ۳ab\\ ۶ & ۴ & ۲\\ ۳a & ۲b & c\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) k ۲) $۲k$ ۳) $\frac{۳}{۲}k$ ۴) $۳k$

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

۳۶- مطابق شکل، O مرکز دایره و چهارضلعی OABC مستطیل است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟

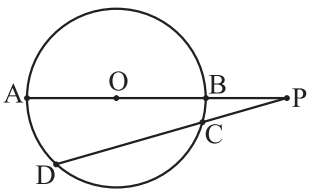


۱) ۲/۲۵
۲) ۲/۵
۳) ۲/۷۵
۴) ۳

۳۷- در دایرهٔ $C(O,R)$، وتر AB به فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}R$ از مرکز دایره واقع است. اگر عمودمنصف وتر AB، دایره را در M و N قطع کند، مساحت چهارضلعی AMBN چند برابر $R^۲$ است؟

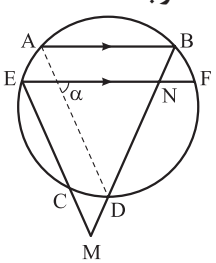
۱) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$
۲) $\frac{۸\sqrt{۲}}{۳}$
۳) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$
۴) $\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$

۳۸- مطابق شکل، نقطهٔ O مرکز دایره و طول PC برابر با شعاع دایره است. اگر اندازهٔ کمان BC برابر ۱۵° باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از PD چند برابر شعاع است؟



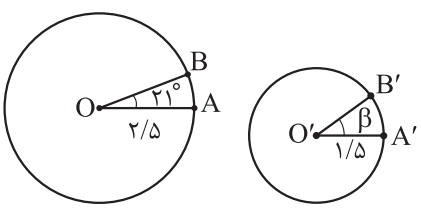
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}$

۳۹- مطابق شکل $AB \parallel EF$ و $ME = EN = NM$، اگر $۲\overset{\frown}{FD} = ۳\overset{\frown}{EC} = ۲۱۰^\circ$ آن‌گاه زاویهٔ α چند درجه است؟



۱) ۷۰
۲) ۶۵
۳) ۷۲/۵
۴) ۶۷/۵

۴۰- مطابق شکل، در دو دایرهٔ $C(O,۲/۵)$ و $C'(O',۱/۵)$ طول کمان‌های AB و $A'B'$ برابرند. اگر $A\hat{O}B = ۲۱^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ β چند درجه است؟



۱) ۳۲/۵
۲) ۳۲
۳) ۳۷/۵
۴) ۳۵

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

AzmoonFree.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله ششم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۲۷/مهر/۱۴۰۳

دفترچه شماره دو

بودجه‌بندی دروس

فیزیک	شیمی
فیزیک (۱) فصل ۳ صفحهٔ ۵۳ تا ۸۲ فیزیک (۳) فصل ۱ (از ابتدای حرکت با شتاب ثابت) و فصل ۲ (تا ابتدای تکانه و قانون دوم نیوتون) صفحهٔ ۱۵ تا ۴۶	شیمی (۱) فصل ۳ (از ابتدای رفتار آب و دیگر مولکول‌ها در میدان الکتریکی) صفحهٔ ۱۰۳ تا ۱۲۲ شیمی (۳) فصل ۱ (از ابتدای اسیدها و بازها) صفحهٔ ۱۳ تا ۳۶

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۸۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	
مجموع	۶۵ سؤال			۸۰ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

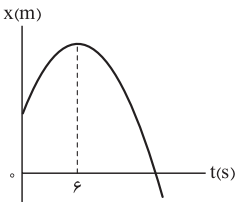
AzmoonFree.ir

فیزیک دوازدهم

۴۱- سرعت متوسط متحرکی که با شتاب ثابت $۱/۲\ m/s^۲$ در مسیری مستقیم حرکت می‌کند، در دو ثانیهٔ سوم، برابر صفر است. سرعت متوسط این متحرک در ۵ ثانیهٔ سوم چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۱۸ ۴) ۹

۴۲- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت، در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ دوم چند برابر تندی متوسط آن در ۴ ثانیهٔ دوم است؟

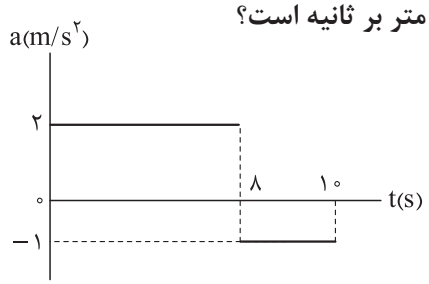


۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸}$ ۴) $\frac{۱۷}{۱۰}$

۴۳- متحرکی با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند. اگر در ۸s اول، سرعت متوسط متحرک برابر $(۸\ m/s)\vec{i}$ و تندی متوسط آن برابر $۱۰\ m/s$ باشد، مسافت طی‌شده توسط متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم، چند متر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

۴۴- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر سرعت متوسط متحرک در ۱۰ s اول برابر $(۱۳/۴\ m/s)\vec{i}$ باشد، تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۵s$ چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۴
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۴

۴۵- خودرویی در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت $۴\ m/s^۲$ به حرکت درمی‌آید و پس از مدتی با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. در نهایت با شتاب ثابتی به بزرگی $۸\ m/s^۲$، حرکتش کند شده و می‌ایستد. اگر کل زمان حرکت خودرو ۲۰s و مسافت طی‌شده توسط آن در این مدت برابر ۳۲۵ m باشد، بیشینهٔ تندی خودرو در حین این حرکت، چند کیلومتر بر ساعت است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۷۲ ۴) ۹۰

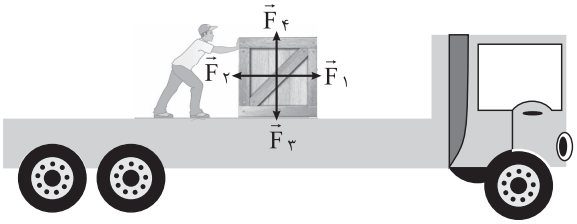
۴۶- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع ۲۸/۸ متری سطح زمین رها می‌شود. این گلوله ۰/۴ s قبل از رسیدن به سطح زمین، در ارتفاع چندمتری از سطح زمین قرار دارد؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۲/۲ ۲) ۴/۴ ۳) ۸/۸ ۴) ۱۷/۶

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

۴۷- شخصی یک جعبه را روی سطح افقی پشت کامیون ساکنی به حرکت درآورده است. در شکل زیر علاوه بر نیرویی که شخص به جعبه وارد می‌کند، سه نیروی وزن، عمودی سطح و اصطکاک هم نشان داده شده است. چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ این نیروها، الزاماً درست است؟ (مقاومت هوا ناچیز است.)



الف) نیروهای $\vec{F}_4$ و $\vec{F}_3$، کنش و واکنش‌اند.

ب) واکنش دو نیروی $\vec{F}_4$ و $\vec{F}_2$، به یک جسم وارد می‌شوند.

پ) اندازهٔ نیروی $\vec{F}_1$ بزرگ‌تر از اندازهٔ نیروی $\vec{F}_2$ است.

ت) نیروهای وارد بر جعبه متوازن هستند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۸- دو جسم A و B به جرم‌های $m_A = ۵\ kg$ و $m_B = ۴\ kg$ روی محور x قرار دارند. اگر در لحظه‌ای جسم A به جسم B نیروی $(۲۰\ N)\vec{i}$ وارد کند، در این لحظه شتاب جسم A برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (به دو جسم در راستای حرکت نیروی دیگری وارد نمی‌شود.)

۱) $۴\vec{i}$ ۲) $۵\vec{i}$ ۳) $-۴\vec{i}$ ۴) $-۵\vec{i}$

۴۹- چتربازی از یک بالگرد ساکن در ارتفاع زیاد، رها شده و مدتی پس از آن‌که سرعتش ثابت شد، چترش را باز می‌کند. در بازهٔ زمانی از لحظهٔ بازشدن چتر تا لحظه‌ای که سرعت چترباز دوباره به مقدار ثابتی برسد، کدام مورد دربارهٔ حرکت چترباز درست است؟

۱) جهت شتاب چترباز به سمت پایین است.

۲) ابتدا چترباز مقداری به سمت بالا جابه‌جا می‌شود.

۳) اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز افزایش می‌یابد.

۴) اندازهٔ نیروی خالص وارد بر چترباز کاهش می‌یابد.

۵۰- دو گوی هم‌اندازهٔ A و B به جرم‌های m_A و m_B که $m_B > m_A$ است، از یک بلندی به طور هم‌زمان رها می‌شوند. اگر اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر دو گوی، در طی حرکت، ثابت و یکسان باشد، به ترتیب از راست به چپ، کدام گوی زودتر به سطح زمین می‌رسد و کدام گوی با تندی بیشتری به سطح زمین برخورد می‌کند؟

۱) A ،A ۲) B ،B ۳) A ،B ۴) B ،A

۵۱- جسمی از ارتفاع بلندی رها شده و پس از مدتی با تندی ثابت v به حرکت خود ادامه می‌دهد تا به سطح زمین برسد. این جسم را با تندی بیشتر از v، از سطح زمین به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اندازهٔ شتاب جسم در لحظه‌ای که تندی آن برابر با v می‌شود، کدام است؟ (g، شتاب گرانش در سطح زمین است.)

۱) $۲g$ ۲) g ۳) $\frac{g}{۲}$ ۴) صفر

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

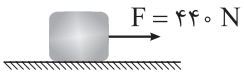
۵۲- شخصی به جرم $60\ kg$ درون آسانسور ساکنی روی ترازوی فنری ایستاده است. به ترتیب، در حالت‌های «الف» و «ب»، مقداری که ترازو نشان می‌دهد، چند نیوتون است؟ $(g = 10\ N/kg)$

الف) آسانسور با شتاب رو به پایین $3\ m/s^2$ حرکت کند.

ب) کابل آسانسور پاره شود و آسانسور سقوط آزاد کند.

۱) ۴۲۰، ۶۰۰ ۲) ۷۸۰، ۶۰۰ ۳) ۴۲۰، صفر ۴) ۷۸۰، صفر

۵۳- در شکل زیر، جعبه‌ای به جرم $80\ kg$ روی سطح افقی به صورت تندشونده در حال حرکت است. اگر اندازهٔ شتاب جعبه $1/5\ m/s^2$ باشد، ضریب اصطکاک جنبشی بین سطح و جعبه کدام است؟ $(g = 10\ N/kg)$



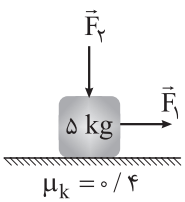
۱) ۰/۱۵

۲) ۰/۴

۳) ۰/۵۵

۴) ۰/۶

۵۴- مطابق شکل نیروی افقی $\vec{F}_1$ و نیروی قائم $\vec{F}_2$ به جسم وارد می‌شود و حرکت جسم با شتاب ثابت $2\ m/s^2$ به سمت راست تندشونده است. اندازهٔ نیروی $\vec{F}_2$ را چند نیوتون افزایش دهیم تا در ادامهٔ حرکت، جسم با شتاب ثابت $2\ m/s^2$ کندشونده حرکت کند؟ $(g = 10\ m/s^2)$



۱) ۲۰

۲) ۲۵

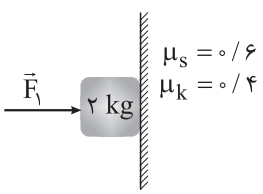
۳) ۴۰

۴) ۵۰

۵۵- خودرویی به جرم $1200\ kg$ در یک مسیر مستقیم با تندی ثابت در حال حرکت است. رانندهٔ خودرو مانعی را در مقابل خود می‌بیند و ترمز می‌کند. اگر مسافت واکنش $15m$، مسافت ترمز $150m$ و زمان واکنش راننده $0/5s$ باشد، اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر خودرو در حین ترمز، با فرض ثابت بودن، چند نیوتون است؟ (از نیروی مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۲۴۰۰ ۲) ۳۶۰۰ ۳) ۴۸۰۰ ۴) ۷۲۰۰

۵۶- در شکل زیر، نیروی افقی $F_1 = 40N$ به جسم وارد می‌شود و جسم با تکیه بر دیوار قائم ساکن مانده است. اگر در همین شرایط، نیروی $F_2 = 56N$ در راستای قائم از پایین به بالا به جسم وارد شود، اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم چند برابر می‌شود؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) $\frac{4}{5}$

۲) $\frac{1}{2}$

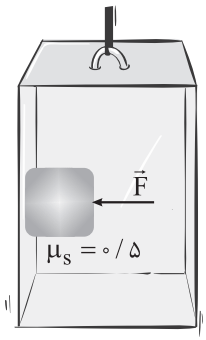
۳) $\frac{1}{3}$

۴) $\frac{5}{12}$

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

۵۷- در شکل زیر، شخصی درون یک آسانسور که با شتاب ثابتی به بزرگی $۲\ m/s^۲$ به طرف پایین شروع به حرکت کرده، جسمی به جرم $۲\ kg$ را با نیروی افقی $\vec{F}$ به دیوار قائم آسانسور فشرده است. اگر جسم در آستانهٔ سُر خوردن باشد، اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$



۱) ۱۶

۲) ۲۴

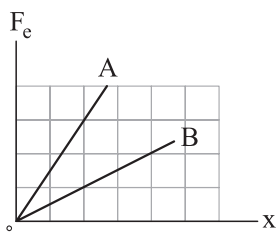
۳) ۳۲

۴) ۴۸

۵۸- به یک فنر قائم یک بار وزنهٔ ۱ نیوتونی و یک بار وزنهٔ ۸ نیوتونی آویزان می‌کنیم. اگر مقدار افزایش طول فنر در حالت دوم $۳/۵cm$ بیشتر از حالت اول باشد، ثابت فنر چند نیوتون بر سانتی‌متر است؟

۱) ۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۰۰۰

۵۹- نمودار اندازهٔ نیروی کشسانی دو فنر A و B برحسب تغییر طول آن‌ها نسبت به طول عادی به شکل زیر است. توسط فنر A، جسمی به جرم m و توسط فنر B، جسمی به جرم $۲m$ روی سطح افقی کشیده می‌شوند. اگر دو جسم با شتاب یکسان شروع به حرکت کنند، افزایش طول فنر A نسبت به حالت عادی آن، چند برابر افزایش طول فنر B نسبت به حالت عادی‌اش است؟ (فنرها در راستای افق هستند. ضریب اصطکاک جنبشی بین هر یک از دو جسم با سطح، یکسان است.)



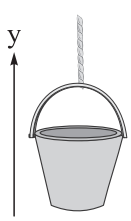
۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) ۶

۴) $\frac{۱}{۶}$

۶۰- در شکل زیر، شخصی یک سطل محتوی مصالح را توسط طنابی سبک با شتاب $(۱/۲\ m/s^۲)\vec{j}$ به طرف بالا می‌کشد. اگر اندازهٔ نیروی کشش طناب ۲۰ درصد کاهش یابد، شتاب سطل به چند متر بر مربع ثانیه می‌رسد؟ $(g = ۹/۸\ m/s^۲)$



۱) $-\vec{j}$

۲) $\vec{j}$

۳) $۱/۲\vec{j}$

۴) $-۱/۲\vec{j}$

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

فیزیک دهم

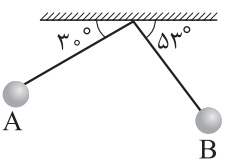
۶۱- به جسمی نیروی $\vec{F} = (۵N)\vec{j}$ وارد می‌شود. اگر جابه‌جایی جسم در SI برابر $\vec{d} = ۶\vec{i} - ۸\vec{j}$ باشد، کار انجام‌شده روی جسم توسط نیروی $\vec{F}$ چند ژول است؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۰ ۳) −۴۰ ۴) −۵۰

۶۲- خودرویی با تندی $۱۸\ km/h$ در حال حرکت است. برای آن‌که انرژی جنبشی خودرو ۴۴ درصد افزایش یابد، تندی آن باید چند متر بر ثانیه تغییر کند؟

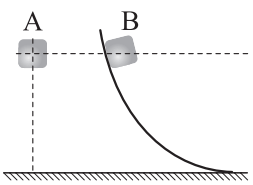
۱) ۱ ۲) ۲/۲ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۴

۶۳- در شکل زیر، گلولهٔ آونگی به طول $۱/۲m$ از نقطهٔ A رها شده و در طرف دیگر تا نقطهٔ B بالا می‌رود. اگر جرم گلولهٔ آونگ g ۵۰۰ باشد، کار انجام‌شده توسط نیروی وزن روی گلوله چند ژول است؟ $(\sin ۵۳^\circ = ۰/۸ , g = ۱۰\ N/kg)$



۱) ۱/۲
۲) −۱/۲
۳) ۱/۸
۴) −۱/۸

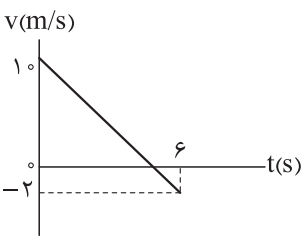
۶۴- در شکل زیر، جسم A از حال سکون سقوط می‌کند و جسم B روی مسیر بدون اصطکاک رها می‌شود. کدام مورد دربارهٔ مقایسهٔ تندی (v) و انرژی جنبشی (K) دو جسم در سطح زمین الزاماً درست است؟



الف) $v_A > v_B$
ب) $v_A = v_B$
پ) $K_A > K_B$
ت) $K_A = K_B$

۱) الف ۲) ب ۳) الف و پ ۴) ب و ت

۶۵- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی به جرم ۳kg که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کار کل انجام‌شده بر روی متحرک در دو ثانیهٔ سوم چند ژول است؟

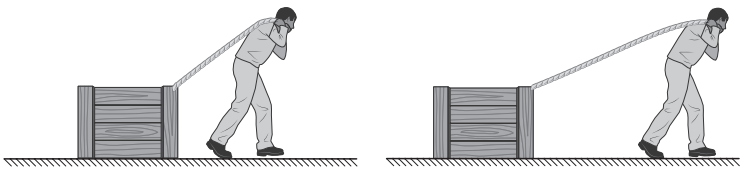


۱) −۳۲
۲) −۱۸
۳) −۶۴
۴) صفر

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

۶۶- شخصی جسم ساکنی را یک‌بار با طنابی بلند (شکل الف) و بار دیگر با طنابی کوتاه (شکل ب) روی سطح افقی بدون اصطکاک می‌کشد. اگر اندازهٔ نیرویی که شخص وارد می‌کند در دو حالت برابر باشد، پس از جابه‌جایی یکسان جسم، به ترتیب از راست به چپ در کدام شکل شخص کار بیشتری انجام می‌دهد و در کدام شکل تندی نهایی جسم بیشتر است؟



(ب) (الف)

۱) الف ـ الف ۲) الف ـ ب ۳) ب ـ الف ۴) ب ـ ب

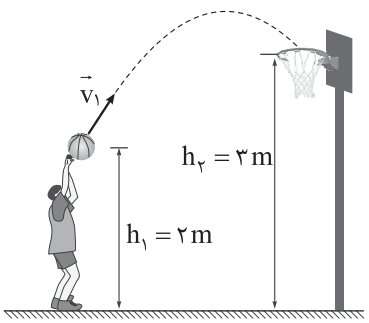
۶۷- از ارتفاع ۱۰۰متری سطح زمین، جسمی با تندی $20\ m/s$ پرتاب می شود. در لحظه‌ای که تندی جسم برابر نصف تندی آن در لحظهٔ برخورد به زمین است، فاصلهٔ جسم از سطح زمین چند متر است؟ ($g = 10\ N/kg$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

۱) ۱۰ ۲) ۵۰ ۳) ۷۵ ۴) ۹۰

۶۸- یک توپ فوتبال را از ارتفاع $2/3$ متری سطح زمین با تندی $4\ m/s$ به سمت پایین پرتاب می‌کنیم و توپ با تندی $8\ m/s$ به سطح زمین می‌رسد. اگر کار نیروی مقاومت هوا در طول مسیر $-3/6\ J$ باشد، جرم توپ چند کیلوگرم است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۳۵ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۴۵

۶۹- در شکل زیر، ورزشکار توپی را با تندی $v_1 = 8\ m/s$ به طرف سبد پرتاب می‌کند. اگر از لحظهٔ پرتاب توپ تا لحظهٔ رسیدن آن به دهانهٔ سبد، اندازهٔ کار نیروی مقاومت هوا، نصف انرژی جنبشی توپ در لحظهٔ پرتاب باشد، تندی توپ در لحظهٔ رسیدن به دهانهٔ سبد، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) $\sqrt{3}$
۲) $2\sqrt{3}$
۳) ۲
۴) ۴

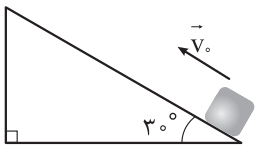
۷۰- شخصی به جرم $50kg$ درون آسانسور ساکنی قرار دارد. آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی $2\ m/s^2$ به سمت پایین شروع به حرکت می‌کند. کار انجام‌شده روی شخص توسط نیروی عمودی سطح وارد بر آن، در ثانیهٔ اول حرکت چند ژول است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۶۰۰- ۲) ۴۰۰- ۳) ۶۰۰ ۴) ۴۰۰

محل انجام محاسبات

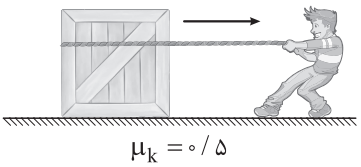
AzmoonFree.ir

۷۱- در شکل زیر، جسمی را با تندی اولیهٔ $10\ m/s$ موازی با سطح رو به بالا پرتاب می‌کنیم. تندی این جسم پس از $4m$ جابه‌جایی روی سطح به $2\ m/s$ می‌رسد. در این بازهٔ زمانی، چند درصد از انرژی جنبشی اولیهٔ جسم توسط کار نیروی اصطکاک تلف شده است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۱۶ ۲) ۲۰
۳) ۵۶ ۴) ۶۰

۷۲- در شکل زیر، شخصی با نیروی افقی $550N$ جعبه‌ای به جرم $100\ kg$ را از حال سکون به حرکت در می‌آورد و پس از $4\ s$ طناب پاره می‌شود. از لحظهٔ شروع حرکت جعبه تا توقف آن، قدرمطلق کار انجام‌شده توسط نیروی اصطکاک روی جعبه چند کیلوژول است؟ $(g = 10N/kg)$



۱) ۰/۲ ۲) ۱/۱
۳) ۲ ۴) ۲/۲

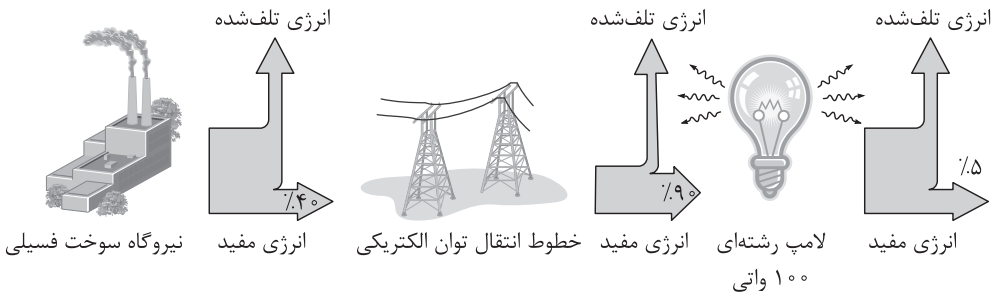
۷۳- جرم اتاقک بالابری به همراه بار آن $600kg$ است. اگر این بالابر در مدت $10\ s$ با تندی ثابت به اندازهٔ $5m$ بالا رود، توان متوسط موتور این بالابر چند اسب بخار است؟ ($g = 10\ N/kg$، $1\ hp = 750W$ و نیروی اتلافی ناچیز است.)

۱) ۴ ۲) ۴۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳۰۰

۷۴- هواپیمایی به جرم ۶۰ تن از سطح زمین به حرکت در می‌آید و پس از ۵ دقیقه از ارتفاع ۶۲۵ متری سطح زمین با تندی $100\ m/s$ عبور می‌کند. با چشم‌پوشی از نیروی مقاومت هوا، توان متوسط موتور هواپیما حداقل چند مگاوات است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲۲/۵ ۳) ۱ ۴) ۱۰

۷۵- شکل زیر طرحواره‌ای از درصد انرژی مفید و انرژی تلف شده در یک نیروگاه سوخت فسیلی را از آغاز تا مصرف در یک لامپ رشته‌ای نشان می‌دهد. با مصرف $20\ L$ گازوئیل در نیروگاه، لامپ رشته‌ای به مدت چند ساعت روشن می‌ماند؟ (با سوختن هر لیتر گازوئیل در نیروگاه، $30MJ$ انرژی گرمایی تولید می‌شود.)



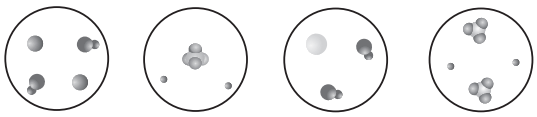
۱) ۶۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳۰۰

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

شیمی دوازدهم

۷۶- با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به واکنش برخی اکسیدها با آب است، کدام موارد زیر درست است؟



(۱) (۲) (۳) (۴)

الف) رنگ کاغذ pH در حضور محلول‌های (۲) و (۳) مشابه یکدیگر است.

ب) حل‌شوندهٔ محلول (۱) می‌تواند هیدروکسید فلزی از گروه دوم جدول تناوبی باشد.

پ) حل‌شوندهٔ محلول‌های (۲) و (۴) به ترتیب می‌توانند $SO_3(g)$ و $N_2O_5(s)$ باشند.

ت) آنیون‌های محلول‌های (۲) و (۴) از نظر شمار پیوندهای کووالانسی مشابه یکدیگر هستند.

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ب

۳) پ ـ ت ۴) ب ـ ت

۷۷- در بین موارد زیر، به ترتیب از راست به چپ، چه تعداد رسانای الکترونی و چه تعداد رسانای یونی وجود دارد؟

$$Fe(s), CH_3COCH_3(aq), C(s, \text{گرافیت}), NaCl(s), MgCl_2(l), S(s), KBr(aq)$$

۱) ۲ ـ ۳ ۲) ۳ ـ ۲ ۳) ۲ ـ ۲ ۴) ۳ ـ ۴

۷۸- با توجه به جدول زیر، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

اسید	غلظت مولی محلول	درجهٔ یونش	$[H^+]$
HA	۰/۰۴	۱	x
HB	۰/۰۲	$۱۰^{-۱/۷}$	y

۱) ۱۰۰

۲) ۲۰۰

۳) ۱۰۰۰

۴) ۲۰۰۰

۷۹- در محلول ۰/۲ مولار استیک اسید در آب، به ترتیب از راست به چپ، کدام گونه‌ها (بدون در نظر گرفتن مولکول‌های آب)، بیشترین و کم‌ترین غلظت مولی را دارند؟

۱) OH^-, H^+

۲) OH^-, CH_3COOH

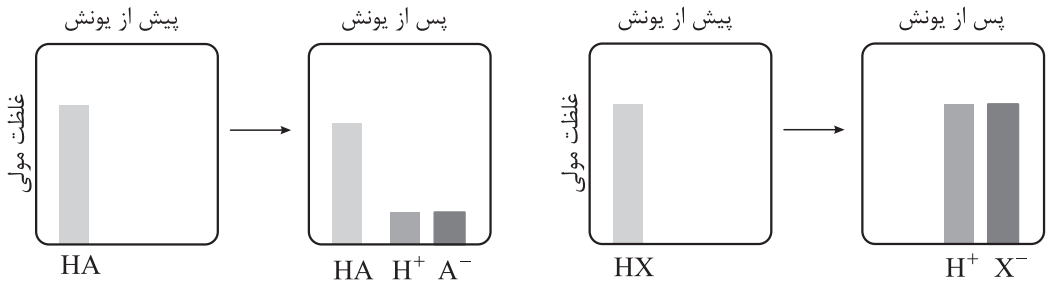
۳) CH_3COOH, CH_3COO^-

۴) H^+, CH_3COOH

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

۸۰- با توجه به شکل‌های زیر که غلظت نسبی گونه‌ها را در محلول دو اسید HA و HX در دما و غلظت یکسان نشان می‌دهند، کدام موارد از مطالب داده‌شده درست است؟



الف) هر دو اسید HA و HX تک‌پروتون‌دار هستند و با انحلال هر مول از آن‌ها در آب، یک مول H^+ تولید می‌شود.

ب) اگر از انحلال هر ۵۰۰ مولکول HA در شرایط معین، ۲۴ یون تولید شده باشد، درصد یونش آن برابر ۲/۴ درصد است.

پ) اگر عنصرهای A و X هر دو جزء عنصرهای گروه ۱۷ جدول دوره‌ای باشند، واکنش‌پذیری عنصر A بیشتر از عنصر X است.

ت) pH محلول ۰/۵ مولار HX، بیشتر از محلول ۰/۵ مولار HA است.

۱) الف ـ ب ـ پ ۲) ب ـ پ ۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

۸۱- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **انحلال برخی از ترکیب‌های مولکولی در آب، به صورت یونی است.**
- **در یک سامانهٔ تعادلی، واکنش‌های رفت و برگشت با سرعت یکسانی انجام می‌شوند؛ از این‌رو غلظت مواد شرکت‌کننده در سامانه برابر می‌شود.**
- **میزان بازی‌بودن بزاق دهان در مقایسه با رودهٔ کوچک بیشتر است.**
- **در دمای اتاق، حاصل‌ضرب $[H^+][OH^-]$ برای محلول سودسوزآور، بیشتر از این حاصل‌ضرب برای محلول آمونیاک است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۲- با توجه به معادله‌های داده‌شده، کدام مطلب درست است؟

$$HX(aq) \rightarrow H^+(aq) + X^-(aq) \quad K_a = \text{بسیار بزرگ}$$

$$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq) \quad K_a = ۲\times۱۰^{-۱۰}$$

۱) با دو برابر کردن غلظت اولیهٔ محلول HX در دمای ثابت، $[X^-]$ در آن تغییر نمی‌کند.

۲) محلول آبی HX، یک الکترولیت قوی و محلول آبی HA، غیرالکترولیت محسوب می‌شود.

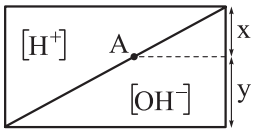
۳) با دو برابر کردن غلظت اولیهٔ محلول HA در دمای ثابت، $[H^+]$ در محلول به تقریب $\sqrt{۲}$ برابر می‌شود.

۴) تفاوت $[H^+]$ و $[X^-]$ در محلول HX، بیشتر از تفاوت غلظت $[H^+]$ و $[A^-]$ در محلول HA است.

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

۸۳- با توجه به نمودار مقابل که تغییر غلظت مولی یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید را در محلول‌های آبی در دمای اتاق نشان می‌دهد، اگر $\frac{۲y}{۳x+y} = ۱/۵$ باشد، pH محلول A کدام است؟ $(\log ۲ = ۰/۳, \log ۳ = ۰/۵)$



۱) ۴/۵ ۲) ۷/۵ ۳) ۸/۵ ۴) ۹/۵

۸۴- غلظت یون یدید در محلول چند مولار هیدرویدیک اسید با مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول ۰/۲ مولار HA با $K_a = ۰/۱$، برابر است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۸۵- جاهای خالی زیر به ترتیب در کدام گزینه به درستی تکمیل شده‌اند؟

الف) تفاوت pH محلول ۰/۲ مولار استیک اسید با pH آب خالص، ..... از تفاوت pH آن با pH مخلوطی از آب و صابون مایع در دمای اتاق است.

ب) از محلول آبی حاصل از فراوردهٔ واکنش هابر، می‌توان به عنوان ..... استفاده کرد.

پ) pH محلول حاصل از حل‌کردن ۰/۱ مول باریم هیدروکسید در ۴۰۰ میلی‌لیتر آب‌مقطر در دمای $۲۵^\circ C$، برابر ..... است. (از تغییر حجم محلول صرف نظر کنید.)

۱) بیشتر ـ شیشه‌پاک‌کن ـ ۱۳/۳ ۲) بیشتر ـ لوله‌بازکن ـ ۱۳/۷
۳) کم‌تر ـ شیشه‌پاک‌کن ـ ۱۳/۷ ۴) کم‌تر ـ لوله‌بازکن ـ ۱۳/۳

۸۶- اگر درصد یونش آمونیاک در محلولی از آن با $pH = ۱۱/۷$ برابر با درجهٔ یونش هیدروکلریک اسید در محلولی از آن با $pH = ۱/۵$ باشد، نسبت غلظت مولار محلول هیدروکلریک اسید به غلظت مولار محلول آمونیاک، کدام است؟ $(\log ۲ = ۰/۳ ، \log ۳ = ۰/۵)$

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۰۳ ۳) ۰/۰۶ ۴) ۰/۰۱۵

۸۷- در کدام گزینه، اثر تغییرهای گفته‌شده بر کمیت مورد نظر به درستی آورده شده است؟

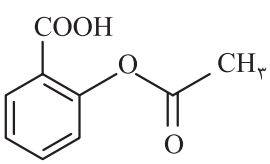
الف) افزایش غلظت اولیهٔ محلول اسید بر مقدار ثابت یونش اسید در دمای ثابت

ب) رقیق‌کردن محلول یک اسید ضعیف بر درجهٔ یونش اسید

پ) افزایش غلظت محلول اتانول در آب بر رسانایی الکتریکی محلول

۱) افزایش ـ کاهش ـ افزایش ۲) بدون تأثیر ـ افزایش ـ بدون تأثیر
۳) بدون تأثیر ـ کاهش ـ افزایش ۴) کاهش ـ افزایش ـ بدون تأثیر

۸۸- آسپرین، یکی از پرکاربردترین داروها در دنیای امروزی به‌ویژه برای بیماران قلبی است که ساختار آن به صورت زیر می‌باشد. اگر نمونه‌ای به جرم ۵/۴ گرم از این ترکیب را در مقداری آب حل کرده و حجم آن را به ۳ لیتر برسانیم، درصد یونش و pH محلول اسیدی حاصل تقریباً چه‌قدر است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید؛ $H = ۱ : g.mol^{-۱}$ ، $O = ۱۶$ ، $C = ۱۲$ ، $K_a = ۵ \times ۱۰^{-۴}$)



۱) ۲۰ ـ ۲/۷ ۲) ۴۰ ـ ۲/۷
۳) ۲۰ ـ ۳/۳ ۴) ۴۰ ـ ۳/۳

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

۸۹- کدام مطلب درست است؟

۱) با افزودن اسید به آب، با وجود افزایش غلظت یون هیدرونیوم، به دلیل کاهش غلظت یون هیدروکسید، رسانایی الکتریکی تغییر قابل توجهی نمی‌کند.

۲) برای بازکردن لوله‌ای که با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده است، باید از محلول سدیم کلرید استفاده کرد.

۳) ترکیب اصلی شیر منیزی برخلاف فراوردهٔ یونی واکنش آن با هیدروکلریک اسید، در دمای اتاق نامحلول است.

۴) در بدن انسان بالغ، روزانه بین ۲ تا ۳ لیتر شیرهٔ معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم در آن حدود $۰/۳$ مولار است.

۹۰- دربارهٔ محلول سود سوزآور (محلول I) و محلول آمونیاک (محلول II) با حجم، دما و pH یکسان، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **شمار مول‌های آغازی دو باز، برای تشکیل دو محلول، نابرابر است.**
- **غلظت مولار یون سدیم در محلول (I) با غلظت مولار یون آمونیوم در محلول (II)، برابر است.**
- **رسانایی الکتریکی دو محلول با هم برابر است.**
- **مجموع شمار گونه‌های موجود در محلول (I)، از مجموع شمار گونه‌های موجود در محلول (II)، کم‌تر است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۱- یک نمونهٔ ۲لیتری از محلول HCl با $pH = ۱/۴$ در اختیار داریم. اگر بخواهیم pH این محلول را به ۲/۳ برسانیم، به چند لیتر محلول KOH با $pH = ۱۲/۵$ نیاز داریم و در انتهای این فرایند، غلظت یون K^+ در محلول نهایی برحسب ppm کدام است؟ (چگالی همهٔ محلول‌ها را برابر چگالی آب در نظر بگیرید؛ $K = ۳۹\ g.mol^{-۱}$)

۱) ۲ ـ ۵۸۵ ۲) ۱ ـ ۲۹۲/۵ ۳) ۱ ـ ۵۸۵ ۴) ۲ ـ ۲۹۲/۵

۹۲- اگر در فرمول ..... ، x برابر ..... باشد، ترکیب مورد نظر ..... .

۱) $KHCO_x$، ۲، پتاسیم هیدروژن کربنات است

۲) HNO_x، ۲، اسیدی است که قدرت اسیدی کم‌تری نسبت به هیدروسیانیک اسید دارد

۳) HNO_x، ۳، از انحلال اکسیدهای نیتروژن در آب تولید می‌شود

۴) $KHCO_x$، ۳، دارای آنیونی است که در ساختار جوش شیرین نیز وجود دارد

۹۳- با توجه به جدول زیر که مواد مؤثر موجود در چند ضداسید را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟

شمارهٔ ضداسید	۱	۲	۳
مادهٔ مؤثر	$Al(OH)_۳, NaHCO_۳$	$Al(OH)_۳, Mg(OH)_۲$	$NaHCO_۳$

۱) مصرف این داروها، سبب افزایش pH اسید معده می‌شوند.

۲) مخلوط مواد مؤثر ضداسید شمارهٔ (۲) با آب، منجر به تشکیل یک سامانهٔ همگن می‌شود.

۳) دو مول ضداسید شمارهٔ (۱) که مواد مؤثر آن به نسبت مولی برابر مخلوط شده‌اند، می‌تواند چهار مول HCl را خنثی کند.

۴) ضداسید شمارهٔ (۳) به عنوان مادهٔ افزودنی در تهیهٔ شوینده‌ها نیز کاربرد دارد.

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

شیمی دهم

۹۴- کدام موارد زیر درست است؟

الف) مولکول‌های آب از سر منفی، جذب میلهٔ شیشه‌ای مالش داده‌شده به موی سر می‌شوند.

ب) بامقایسهٔ جهت‌گیری مولکول‌های A و B در میدان الکتریکی، می‌توان نسبت نقطهٔ جوش این دو مولکول را پیش‌بینی کرد.

پ) قدرت نیروهای بین مولکولی آب، حدود دو برابر قدرت نیروهای بین مولکولی هیدروژن سولفید است.

ت) رفتار مولکول‌های آب از ویژگی‌های ساختاری و حالت هندسی V شکل آن سرچشمه می‌گیرد.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ ۳) الف ـ ت ۴) پ ـ ت

۹۵- با توجه به عبارت‌های زیر، پاسخ درست پرسش‌های زیر در کدام گزینه آمده است؟

a) این مولکول در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

b) این مولکول می‌تواند پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.

c) این مولکول به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

d) این مولکول با انحلال در آب، ماهیت خود را حفظ می‌کند.

الف) کدام عبارت(ها) برای توصیف مولکول استون $(CH_3\overset{\overset{O}{\|}}{C}CH_3)$ مناسب است؟

ب) عبارت (a) کدام‌یک از مولکول(ها) (HF, CO_2, CH_4) را توصیف می‌کند؟

پ) کدام عبارت جملهٔ زیر را توجیه می‌کند؟

«نقطهٔ جوش NH_3، از ترکیب‌های هیدروژن‌دار عنصرهای هم‌گروه نیتروژن بالاتر است.»

۱) c، CH_4 و b، CO_2 ۲) c، CO_2 c

۳) c و d، CH_4 و HF، d ۴) c و d، CH_4 و b، CO_2

۹۶- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

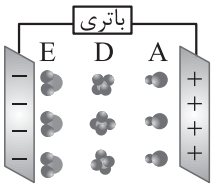
- **آب یکی از موادی است که به هر سه حالت جامد، مایع و بخار (گاز) در طبیعت یافت می‌شود.**
- **بین مولکول‌های آب در حالت بخار، پیوند هیدروژنی وجود ندارد و مولکول‌ها به صورت آزادانه و منظم از جایی به جای دیگر انتقال می‌یابند.**
- **بین مولکول‌های آب در حالت مایع، پیوندهای هیدروژنی سستی وجود دارد؛ به طوری که مولکول‌ها می‌توانند روی هم بلغزند و جابه‌جا شوند.**
- **بین مولکول‌های آب در حالت جامد، پیوندهای هیدروژنی قوی وجود دارد و مولکول‌های آب در جاهای به نسبت ثابتی قرار دارند.**
- **مبنای شکل دانه‌های برف را می‌توان به وجود شش‌وجهی‌ها در ساختار منظم یخ نسبت داد.**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

۹۷- با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه نادرست است؟



۱) گشتاور دوقطبی مولکول‌های A و E برخلاف مولکول D، به یقین بزرگ‌تر از صفر است.

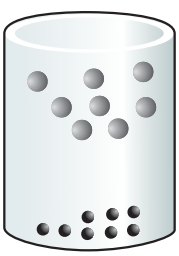
۲) اگر نقطهٔ جوش مولکول A، بیشتر از صفر درجهٔ سلسیوس باشد، می‌تواند پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.

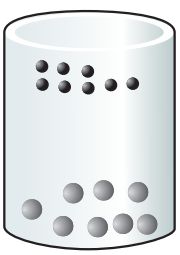
۳) اگر در نیروهای جاذبهٔ مولکول E، اتم هیدروژن نقش کلیدی ایفا کند، گشتاور دوقطبی آن بزرگ‌تر از یک است.

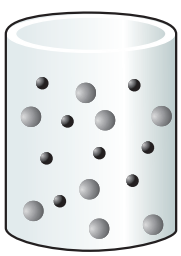
۴) نقطهٔ جوش مولکول D، به یقین از نقطهٔ جوش سایر ترکیب‌های هیدروژن‌دار عنصرهای هم‌گروه آن، کم‌تر است.

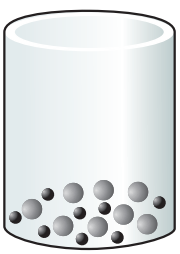
۹۸- با توجه به جدول داده‌شده، کدام شکل نمای ذره‌ای بهتری از مخلوط هگزان و کربن تتراکلرید را در دمای اتاق نشان می‌دهد؟

ویژگی / ماده	هگزان (●)	کربن تتراکلرید (●)
جرم مولی $(g.mol^{-1})$	۸۶	۱۵۴
نقطهٔ جوش $(^\circ C)$	۶۸/۷	۷۶/۸
چگالی $(g.ml^{-1})$	۰/۶۶	۱/۵۹

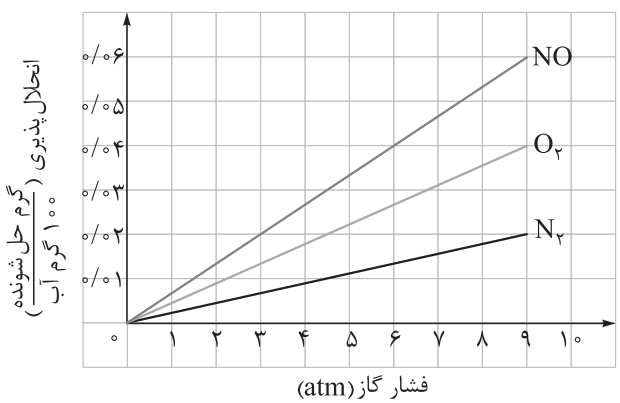
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۹۹- با توجه به نمودار مقابل که انحلال‌پذیری گازها در آب‌مقطر در دمای ثابت را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟ $(N=14, O=16 : g.mol^{-1})$



۱) به قانون هنری پیرامون گازها مرتبط است.

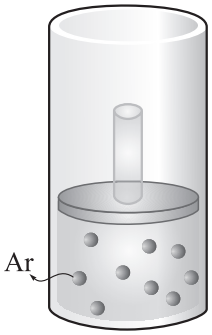
۲) معادلهٔ انحلال‌پذیری گاز نیتروژن برحسب فشار را می‌توان به صورت $S \simeq 2/2\times10^{-3}P$، نشان داد.

۳) در فشار ۶atm، حدود ۲/۶۷ میلی‌مول گاز نیتروژن مونوکسید در ۲۰۰ گرم آب حل می‌شود.

۴) با افزودن مقداری نمک به آب، شیب نمودار انحلال‌پذیری گاز اکسیژن افزایش می‌یابد.

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir



۱۰۰- شکل روبه‌رو محلول سیرشده‌ای از گاز آرگون در ۲ لیتر آب در دمای $25^{\circ}C$ را نشان می‌دهد (مولکول‌های آب نشان داده نشده‌اند). اگر انحلال‌پذیری این گاز در آب در فشار $5\,atm$ و دمای $25^{\circ}C$، برابر ۰/۰۳ گرم در ۱۰۰ گرم آب باشد، فشار گاز در شکل داده‌شده، چند اتمسفر است؟ (هر ذره را معادل ۰/۰۰۳ مول از آن در نظر بگیرید؛ $Ar = 40\ g.mol^{-1}$)

۱) ۱۳/۵
۲) ۹
۳) ۶/۷۵
۴) ۲/۵

۱۰۱- مطابق شکل روبه‌رو، حجم‌های برابری از دو محلول توسط یک غشای نیمه‌تراوا از یکدیگر جدا شده‌اند. اگر به محلول سمت ..... غشا فشار وارد شود، فرایند اسمز معکوس انجام خواهد شد و با گذشت زمان، تفاوت غلظت مولی دو محلول ..... می‌یابد.

۱) راست ـ افزایش
۲) راست ـ کاهش
۳) چپ ـ کاهش
۴) چپ ـ افزایش

۱۰۲- کدام گزینه درست است؟

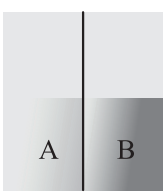
۱) با روش اسمز معکوس می‌توان مخلوطی از آب و اتانول را تا حد مطلوبی به اجزای سازنده تفکیک کرد.

۲) آب تصفیه‌شده به روش صافی کربنی، برخلاف روش تقطیر نیاز به کلرزنی ندارد.

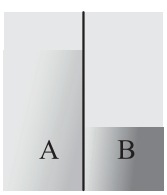
۳) برای حذف حشره‌کش‌ها و میکروب‌ها، روش اسمز معکوس نسبت به تقطیر، کارایی بیشتری دارد.

۴) پلاسیده‌شدن خیار تازه در آب شور به دلیل پدیدهٔ اسمز وارونه است.

۱۰۳- مطابق شکل (الف)، حجم‌های برابری از دو مایع A و B توسط یک غشای نیمه‌تراوا از یکدیگر جدا شده‌اند و پس از مدتی شکل ظرف به صورت (ب) درمی‌آید. اگر مایع اولیه B، محلول ۱۸ درصد جرمی گلوکز $(d = 1/25\,g.mL^{-1})$ باشد، مایع A کدام مورد می‌تواند باشد؟ $(H = 1\ ,\ C = 12\ ,\ O = 16 : g.mol^{-1})$



(الف)

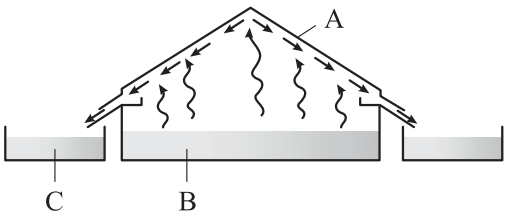


(ب)

۱) آب‌مقطر
۲) محلول ۲ مولار گلوکز
۳) محلول ۱۵ درصد جرمی گلوکز
۴) محلول ۱ مولار گلوکز

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir



۱۰۴- با توجه به شکل مقابل که روشی برای تهیهٔ آب شیرین از آب دریا را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟

۱) این روش تقطیر نام دارد که برخلاف اسمز معکوس، در آن به غشای نیمه‌تراوا و منبع انرژی نیازی نیست.

۲) A یک سقف فلزی است که فرایند میعان بر سطح آن انجام می‌شود.

۳) در آب تهیه‌شده به این روش، فلزهای سمی و نافلزها، هم‌چنان در آب وجود دارند.

۴) اگر B دارای ترکیب‌های آلی فرّار باشد، آب تولیدشده در قسمت C باید به کمک روش‌های دیگر دوباره تصفیه شود.

۱۰۵- یک تن آب شور با غلظت ۱۶ درصد جرمی از انواع نمک‌ها را به یک دستگاه تصفیهٔ آب که با روش اسمز معکوس کار می‌کند، وارد می‌کنیم. اگر این دستگاه از هر ۴ گرم نمک، ۳ گرم آن را از آب خارج کند، جرم آب تصفیه‌شده خروجی چند کیلوگرم بوده و درصد جرمی نمک باقی‌مانده در آن به تقریب کدام است؟ (فرض کنید غشای نیمه‌تراوا، همهٔ آب خالص اولیه را از خود عبور می‌دهد.)

۱) ۸۸۰ ـ ۴/۷۵ ۲) ۸۸۰ ـ ۴/۵۴ ۳) ۹۶۰ ـ ۴/۷۵ ۴) ۹۶۰ ـ ۴/۵۴

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.
azmoon.kheilisabz.com

محل انجام محاسبات

AzmoonFree.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله ششم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۲۷/مهر/۱۴۰۳

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	زهرا پورشیر ـ شمیم پهلوان‌شریف ـ فرشاد حسن‌زاده ـ مجید خاکی ـ مجید رفعت علی شهرابی ـ محمد گودرزی ـ میلاد منصوری ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ محمدطاهر شعاعی ـ حسین هاشمی طاهری ـ صبا مهدوی
فیزیک	امیرحسین ابومحبوب ـ محمدطاهر شعاعی ـ حسین هاشمی طاهری ـ صبا مهدوی
شیمی	مهدی براتی ـ یاسر راش ـ سروش عبادی ـ یاسر عبداللهی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	شمیم پهلوان‌شریف	علی شهرابی محمد گودرزی سجاد داوطلب	ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسسته	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب مریم نظری	مهدی خوش‌نویس ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	زهرا جالینوسی	مهدی خوش‌نویس ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	زهرا جالینوسی	مهدی خوش‌نویس ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی سروش عبادی	محمد مرادی وحید فارسیان	احسان رحیمی هومن زندی مینا نظری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

AzmoonFree.ir

حسابان دوازدهم و پایه مرتبط

۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^۴-x^۳+ax^۲+bx+۳$ بر چندجمله‌ای‌های $x-۲$ و $x+۱$ به ترتیب برابر ۵ و ۲ است.

$p(۲)$

$p(-۱)$

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $ap(x-۱)+bp(۲-x)$ بر $x-۳$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۴

۳) ۳ ۴) -۵

Hint ۲ و -۱ رو جای‌گذاری کن و با حل یه دستگاه، a و b رو به دست بیار.

درس Box

تقسیم چندجمله‌ای‌ها

اگر $p(x)$ چندجمله‌ای مقسوم، $b(x)$ چندجمله‌ای مقسوم‌علیه، $q(x)$ چندجمله‌ای خارج‌قسمت و $r(x)$ چندجمله‌ای باقی‌مانده باشد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$p(x)=b(x)q(x)+r(x)$$

۱) اگر $b(x)=x-a$ باشد، داریم:

$$p(x)=(x-a)q(x)+r \Rightarrow r=p(a)$$

۲) اگر $b(x)=(x-a)(x-b)$ باشد، داریم:

$$p(x)=(x-a)(x-b)q(x)+\alpha x+\beta \Rightarrow \begin{cases}\alpha a+\beta=p(a)\\ \alpha b+\beta=p(b)\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق درس‌باکس، باقی‌مانده‌های تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-۲$ و $x+۱$ به ترتیب برابر $p(۲)$ و $p(-۱)$ است.

به همین خاطر در ضابطهٔ چندجمله‌ای $p(x)$ مقادیر $x=۲$ و $x=-۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم و برابر ۵ و ۲ قرار می‌دهیم:

$$p(۲)=۱۶-۸+۴a+۲b+۳=۵ \Rightarrow ۴a+۲b=-۶ \xrightarrow{\div ۲} ۲a+b=-۳$$

$$p(-۱)=۱-(-۱)+a-b+۳=۲ \Rightarrow a-b=-۳$$

گام دوم: دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}۲a+b=-۳\\ a-b=-۳\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۳a=-۶ \Rightarrow a=-۲ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} b=۱$$

گام سوم: باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(۲-x)+p(x-۱)$ بر $x-۳$، مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=۳$ است:

(-۲ → a، ۱ → b)

$$\xrightarrow{x=۳} \text{باقی‌مانده}=-۲p(۲)+p(-۱) \xrightarrow[p(۲)=۵\ ,\ p(-۱)=۲]{\text{فرض سؤال}} \text{باقی‌مانده}=(-۲)(۵)+۲=-۸$$

AzmoonFree.ir

۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^۶+۳x^۵+ax^۲+bx+۱$ بر چندجمله‌ای $x^۳+۱$ برابر $x^۲+x+۲$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x-a)$ بر $x-b$ کدام است؟

۱) ۳۰

۲) ۳۲

۳) ۳۴

۴) ۳۶

مشاوره در سال‌های اخیر، سؤالات خارج از محدودهٔ کتاب‌های درسی در کنکور سراسری دیده شده است و برای حل آن‌ها طبیعتاً چاره‌ای به‌جز مطالعهٔ فراتر از کتاب درسی (البته منظور نظام قدیم آموزشی است) نداریم. این سؤال هم از آن دسته سؤالات است که در نوبت دوم کنکور ۱۴۰۳ مشابه آن دیده شده است. با دقت به گام‌های پاسخ تشریحی، الگوی حل این سؤالات را فرا بگیرید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $g(x)$، مقدار چندجمله‌ای $f(x)$ است به ازای ریشه‌های چندجمله‌ای $g(x)$ و مهم نیست این ریشه‌ها حقیقی هستند یا نه. اگر حقیقی باشند، طبق مفهومی که تاکنون از کتاب درسی یاد گرفته‌ایم، مشابه پاسخ سؤال قبل عمل می‌کنیم و پیش می‌رویم؛ اما اگر ریشه‌ها حقیقی نباشند یا حتی مرتبهٔ تکرار آن‌ها بیش از یک باشد، باید به گونهٔ دیگری عمل کنیم.

در این سؤال، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای $x^۳+۱$ در جواب(های) معادلهٔ $x^۳=-۱$ رخ می‌دهد.

گام دوم: پس سعی می‌کنیم در بسط چندجمله‌ای $p(x)$، عبارت $x^۳$ را جدا کنیم و مقدار آن را برابر -۱ قرار دهیم:

$$p(x)=(\underbrace{x^۳}_{-۱})^۲+۳(\underbrace{x^۳}_{-۱})x^۲+ax^۲+bx+۱ \Rightarrow r(x)=۱-۳x^۲+ax^۲+bx+۱$$

$$\Rightarrow r(x)=(a-۳)x^۲+bx+۲$$

گام سوم: بیش از این نمی‌توانیم عبارت $x^۳$ را در چندجمله‌ای $r(x)$ ببینیم، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم، همین چندجمله‌ای $r(x)=(a-۳)x^۲+bx+۲$ است. طبق فرض سؤال، این چندجمله‌ای باید با چندجمله‌ای $x^۲+x+۲$ متحد باشد:

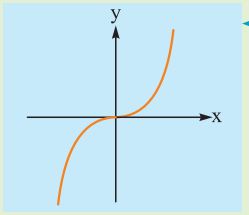
$$\Rightarrow \begin{cases} a-۳=۱ \Rightarrow a=۴ \\ b=۱ \end{cases}$$

گام چهارم: پس $p(x)=x^۶+۳x^۵+۴x^۲+x+۱$ است و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $\underbrace{p(x-۴)}_{p(x-a)}$ بر $\underbrace{x-}_{x-b}$، برابر $p(-۳)$ است:

$$R=p(x-۴)|_{x=۱}=p(-۳)=\underbrace{(-۳)^۶+۳(-۳)^۵}_{\text{برابر صفر است: } (۳+(-۳))(-۳)^۵}+۴(-۳)^۲+(-۳)+۱=۳۴$$

AzmoonFree.ir

۳ تابع $f(x)=ax^۴+x^۳+(a-۳)x^۲+۳x+۷$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. نمودار کدام تابع از ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟



۱) $y=f(x+۱)$

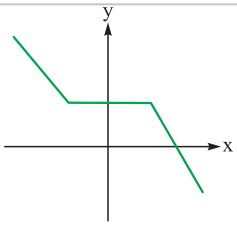
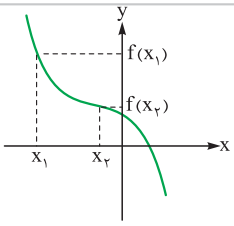
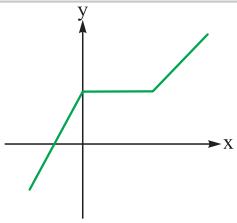
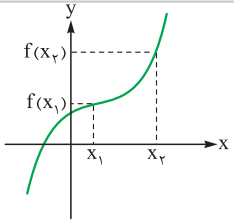
۲) $y=f(x-۱)$

۳) $y=f(x)+۱$

۴) $y=f(x)-۱$

Hint تابع چندجمله‌ای از درجهٔ چهار می‌تونه یکنوا بشه؟

درس Box مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به مجموعهٔ A، تابع f:

نزولی است.	اکیداً نزولی است.
$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\geq f(x_۲)$	$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$
	
در بازه‌ای که تابع I نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به پایین خواهیم رفت.
صعودی است.	**اکیداً صعودی است.**
$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\leq f(x_۲)$	$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$
	
در بازه‌ای که تابع f صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به بالا خواهیم رفت.

دقت کنید اگر مجموعهٔ A برابر دامنهٔ تابع باشد، آن‌گاه می‌گوییم تابع f روی دامنهٔ خود صعودی (اکیداً صعودی) یا نزولی (اکیداً نزولی) است؛ هم‌چنین اگر تابعی بر دامنهٔ خود صعودی (نزولی) باشد، آن‌گاه آن را یکنوا می‌نامیم.

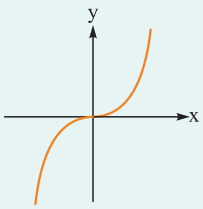
الف) هر تابع اکیداً صعودی، خود یک تابع صعودی است و به طریق مشابه هر تابع اکیداً نزولی، خود یک تابع نزولی است.

ب) تابع ثابت (روی یک بازه) را تابعی هم صعودی و هم نزولی در نظر می‌گیریم.

پ) اگر تابع f روی دامنهٔ خود صعودی یا نزولی نباشد، f را تابعی غیریکنوا می‌نامیم.

نکته توابع چندجمله‌ای از درجهٔ چهار روی دامنه‌شان که $\mathbb{R}$ است، قطعاً غیریکنوا هستند.

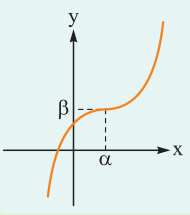
تابع درجه‌سوم



تابع $y=x^۳$ را یک تابع درجه‌سوم می‌نامیم و نمودار آن به صورت مقابل است:

این تابع در $x=۰$ بر محور xها مماس است.

با انتقال α واحد به راست و β واحد به بالا، نمودار تابع به صورت مقابل تغییر می‌کند:



ضابطهٔ تابع انتقال‌یافته $y=(x-\alpha)^۳+\beta$ است.

در این تابع نقطهٔ (α,β) مرکز تقارن نمودار است و خط مماس بر آن در $x=\alpha$ افقی است.

AzmoonFree.ir

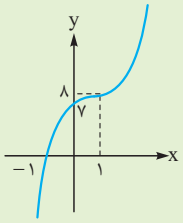
پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** طبق درس‌باکس این سؤال و نکتهٔ مربوط به آن، تابع f نمی‌تواند از درجهٔ چهار باشد، پس $a = 0$ است و داریم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$$

گام دوم: ضابطهٔ تابع f را به صورت مکعب دوجمله‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8 = (x-1)^3 + 8$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



گام سوم: و برای این‌که این نمودار از ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات نگذرد، دو راه داریم:

$$\begin{cases} \text{یا ۱ واحد به راست ببریم.} \Rightarrow y = f(x-1) \\ \text{یا ۷ واحد به پایین ببریم.} \Rightarrow y = f(x) - 7 \end{cases}$$

AzmoonFree.ir

۴ تابع $f(x)=\begin{cases} kx+۳ & ;x<۱ \\ -x|x+۱| & ;x\geq ۱ \end{cases}$ اکیداً یکنواست. حدود k کدام است؟

۱) $-۱۰<k<-۳$

۲) $۳<k<۵$

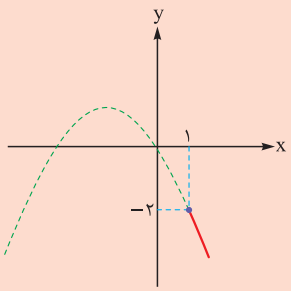
۳) $-۱۰<k<۰$

۴) $-۵\leq k<۰$

Hint راه حل چنین سوالاتی رسمه، پس رسم کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** لازم است که نمودار تابع را رسم کنیم. چون برای $x\geq ۱$ ضابطه تابع را داریم، ابتدا نمودار این ضابطه را رسم می‌کنیم:

$$x\geq ۱\Rightarrow x+۱>۰\xrightarrow{|x+۱|=x+۱} y=-x(x+۱)$$



گام دوم: همان‌طور که از نمودار پیداست، تابع f، باید اکیداً نزولی باشد، بنابراین شیب خط $y=kx+۳$ باید منفی باشد:

$$\Rightarrow k<۰ \quad (۱)$$

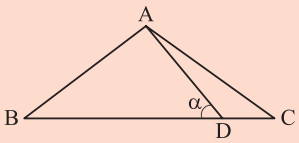
گام سوم: دوماً مقدار تابع خطی $y=kx+۳$ در $x=۱$ نباید از -۲ کم‌تر باشد:

$$\Rightarrow k+۳\geq -۲\Rightarrow k\geq -۵ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} -۵\leq k<۰$$

AzmoonFree.ir

۵ در شکل زیر، $AB = AC = ۱۲$ و $BD = ۱۵$ است. اگر $\tan\alpha = \frac{\sqrt{۷}}{۲}$ باشد، طول پاره‌خط CD کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۲}$

۲) ۲

۳) ۳

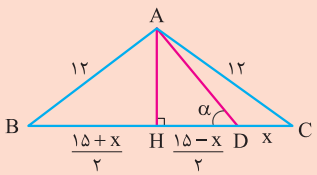
۴) $\frac{۵}{۳}$

مشاوره در کنکورهای دو سال اخیر، علاقهٔ طراحان به کاربرد مثلثات در هندسه بیشتر شده است. سعی کنید بیشتر از قبل «مثلثات در هندسه» را کار و تمرین کنید.

Hint این سؤال شبیه یه سؤال از کنکور اردیبهشت امساله و راهکارشم رسم ارتفاع AH هستش.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: باید یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد کنیم تا بتوانیم از نسبت‌های مثلثاتی در آن استفاده کنیم. به همین خاطر، ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم:



هدف، محاسبهٔ طول ضلع CD است، پس آن را x می‌گیریم و در نتیجه طول ضلع BC برابر $۱۵+x$ می‌شود. از آن‌جا که مثلث ABC متساوی‌الساقین است، ارتفاع AH میانه نیز هست، پس $BH = HC = \frac{۱۵+x}{۲}$ است.

گام دوم: برای این‌که در مثلث AHD از $\tan\alpha$ استفاده کنیم، لازم است ابتدا طول ارتفاع AH را برحسب x حساب کنیم و برای این کار هم در یکی از مثلث‌های AHC یا AHB از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$۱۲^۲ = (\frac{۱۵+x}{۲})^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۱۴۴ = \frac{۲۲۵+۳۰x+x^۲}{۴} + AH^۲$$

$$\Rightarrow AH^۲ = ۱۴۴ - \frac{۲۲۵+۳۰x+x^۲}{۴} = \frac{۳۵۱-۳۰x-x^۲}{۴}$$

گام سوم: حال می‌توانیم از $\tan\alpha$ استفاده کنیم:

$$\tan\alpha = \frac{AH}{HD} \Rightarrow \tan^۲\alpha = \frac{AH^۲}{HD^۲} = \frac{\frac{۳۵۱-۳۰x-x^۲}{۴}}{\frac{۲۲۵-۳۰x+x^۲}{۴}} = (\frac{\sqrt{۷}}{۲})^۲ = \frac{۷}{۴}$$

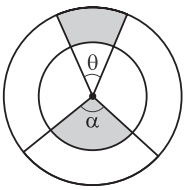
$$\Rightarrow \frac{۳۵۱-۳۰x-x^۲}{۲۲۵-۳۰x+x^۲} = \frac{۷}{۴} \Rightarrow ۷x^۲ - ۲۱۰x + ۱۵۷۵ = ۱۴۰۴ - ۱۲۰x - ۴x^۲ \Rightarrow ۱۱x^۲ - ۹۰x + ۱۷۱ = ۰$$

با توجه به گزینه‌ها و چک‌کردن مقادیر آن‌ها، می‌بینیم که $x = ۳$ جواب معادلهٔ بالا است، در نتیجه $CD = ۳$ است.

AzmoonFree.ir

۶ در شکل زیر، دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های ۶ و ۸ مفروض‌اند. اگر محیط‌ها و مساحت‌های دو ناحیهٔ سایه‌خورده برابر باشند، زاویهٔ α برحسب رادیان کدام است؟

یعنی محیط‌ها برابر و مساحت‌ها نیز برابر باشند.



۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

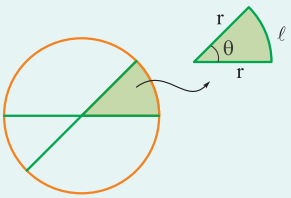
۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

درس Box

قطاع

برشی مانند قسمت رنگی شکل مقابل از یک دایره را قطاع می‌نامیم:

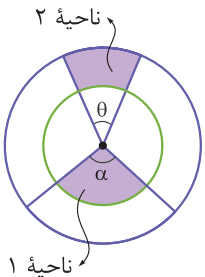


اگر شعاع دایره r باشد، طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ θ از رابطهٔ $\ell = r\theta$ به دست می‌آید که θ برحسب رادیان است، پس محیط قطاع برابر $P = ۲r + r\theta$ است.

هم‌چنین مساحت قطاع از رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲}\theta r^۲$ به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق درس‌باکس محیط‌ها و مساحت‌ها را به دست می‌آوریم:



ناحیهٔ ۱:
- محیط: $P_۱ = ۲(۶) + ۶\alpha = ۱۲ + ۶\alpha$
- مساحت: $S_۱ = \frac{۱}{۲}\alpha(۶)^۲ = ۱۸\alpha$

ناحیهٔ ۲:
- محیط: $P_۲ = ۶\theta + ۸\theta + ۲(۸-۶) = ۱۴\theta + ۴$
- مساحت: $S_۲ = \frac{۱}{۲}\theta(۸)^۲ - \frac{۱}{۲}\theta(۶)^۲ = ۳۲\theta - ۱۸\theta = ۱۴\theta$

گام دوم: محیط‌ها را با هم و مساحت‌ها را نیز با هم برابر می‌گیریم:

برابری محیط‌ها: $۱۲ + ۶\alpha = ۱۴\theta + ۴ \Rightarrow ۴ + ۳\alpha = ۷\theta$

برابری مساحت‌ها: $۱۸\alpha = ۱۴\theta \Rightarrow ۹\alpha = ۷\theta$

مشخص است که $۴ + ۳\alpha$ و ۹α باید با هم برابر باشند:

$$۹\alpha = ۴ + ۳\alpha \Rightarrow ۶\alpha = ۴ \Rightarrow \alpha = \frac{۲}{۳}\text{rad}$$

AzmoonFree.ir

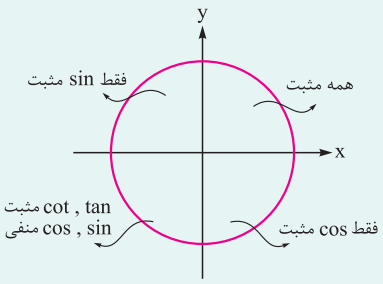
۷ اگر $\sin\alpha\cos\alpha < 0$ و $\tan\alpha > \cot\alpha$ باشد، زاویهٔ α برحسب رادیان، کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱۳\pi}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۷\pi}{۲۰}$ ۳) $\frac{۳۳\pi}{۲۰}$ ۴) $\frac{۲۹\pi}{۲۰}$

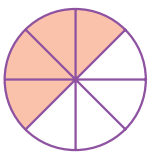
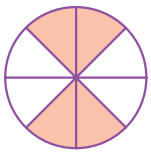
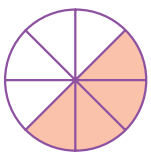
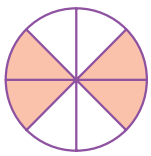
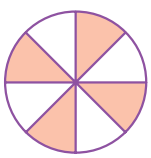
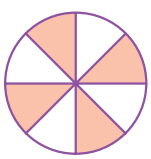
درس Box

دایرهٔ مثلثاتی

می‌دانیم که دایرهٔ مثلثاتی، دایره‌ای است با شعاع ۱ که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات است. علامت نسبت‌های مثلثاتی در این دایره در شکل زیر آمده است:



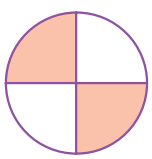
حال برای درک بهتر، حدود انتهای کمان θ را که به ازای آن‌ها رابطهٔ مورد نظر برقرار باشد، در هر شکل نشان داده‌ایم:

$\sin\theta > \cos\theta$		$\lvert\sin\theta\rvert > \lvert\cos\theta\rvert$ $\lvert\tan\theta\rvert > \lvert\cot\theta\rvert$	
$\cos\theta > \sin\theta$		$\lvert\cos\theta\rvert > \lvert\sin\theta\rvert$ $\lvert\cot\theta\rvert > \lvert\tan\theta\rvert$	
$\tan\theta > \cot\theta$		$\cot\theta > \tan\theta$	

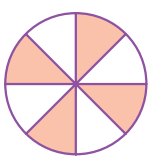
و با همین منطق می‌شود روابط بیشتری را نوشت و حدود قابل قبول برای انتهای کمان θ را مشخص کرد. این تمرین خودتان باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

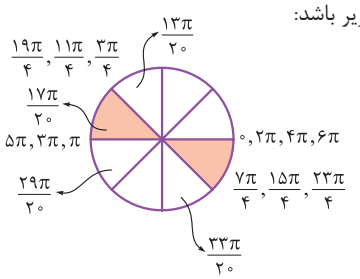
گام اول: $\sin\alpha\cos\alpha$ منفی است، پس $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ غیر هم‌علامت‌اند. این یعنی انتهای کمان α در ربع‌های دوم یا چهارم است.



گام دوم: طبق درس‌باکس، انتهای کمان α باید در ناحیهٔ مشخص‌شدهٔ شکل زیر باشد تا رابطهٔ $\tan\alpha > \cot\alpha$ برقرار باشد:



گام سوم: از اشترک دو نمودار رسم‌شده، حدود انتهای کمان α باید مطابق شکل زیر باشد:



که در بین گزینه‌ها فقط $\frac{۱۷\pi}{۲۰}$ شرایط لازم را دارد:

$$\frac{۳\pi}{۴} < \frac{۱۷\pi}{۲۰} < \pi$$

AzmoonFree.ir

۸ اگر نمودار تابع $y = a + b\sin(\frac{x}{ab})$ را ۳ واحد به بالا انتقال دهیم، از بالا بر خط $y = 8$ و اگر ۵ واحد به پایین انتقال دهیم، از پایین بر خط $y = -8$ مماس می‌شود. دورهٔ تناوب این تابع کدام است؟

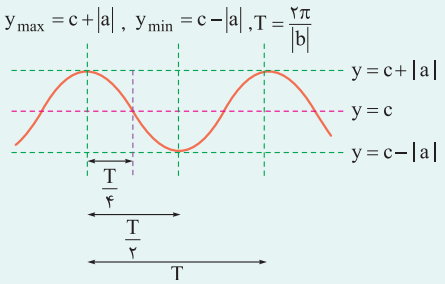
۱) 8π ۲) 6π ۳) 4π ۴) 12π

Hint

کافیه که انتقال لازم رو انجام بدی و فرمول‌های max و min رو بنویسی.

درس Box

نمودار توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ در حالت کلی به صورت زیر است و روابط زیر برای مقادیر ماکزیمم و مینیمم و هم‌چنین دورهٔ تناوب آن‌ها برقرار است.



- فاصلهٔ هر دو ماکزیمم متوالی یا هر دو مینیمم متوالی برابر T است.
- فاصلهٔ افقی یک ماکزیمم با مینیمم مجاورش، برابر نصف دورهٔ تناوب $(\frac{T}{2})$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در ابتدا انتقال‌های مفروض صورت سؤال را انجام می‌دهیم:

$$y = a + b\sin\frac{x}{ab} \begin{cases} \xrightarrow{\text{۳ واحد به بالا}} f(x) = a + 3 + b\sin\frac{x}{ab} \\ \xrightarrow{\text{۵ واحد به پایین}} g(x) = a - 5 + b\sin\frac{x}{ab} \end{cases}$$

گام دوم: حالا با توجه به انتقال‌های گفته‌شده، متوجه می‌شویم که ماکزیمم تابع f برابر ۸ و مینیمم تابع g برابر ۸- است، پس داریم:

$$a + 3 + |b| = 8 \Rightarrow a + |b| = 5$$

$$a - 5 - |b| = -8 \Rightarrow a - |b| = -3$$

گام سوم: دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + |b| = 5 \\ a - |b| = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} |b| = 4$$

گام چهارم: حال دوره تناوب تابع اولیه را به دست می‌آوریم:

$$y = a + b\sin\frac{x}{ab} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{|ab|}} = 2|ab|\pi \xrightarrow{a>0} 2a|b|\pi \xrightarrow[|b|=4]{a=1} T = 8\pi$$

AzmoonFree.ir

۹ متمم و مکمل زاویهٔ θ به ترتیب زوایای α و β هستند. کدام رابطه همواره برقرار است؟

$$\begin{cases}\alpha+\theta=\frac{\pi}{۲}\\ \beta+\theta=\pi\end{cases}$$

۱) $\sin\beta+\cos\alpha=۰$

۲) $\cos\beta+\sin\alpha=۰$

۳) $\cos\theta-\cos\beta=۰$

۴) $\sin\theta+\cos\alpha=۰$

Hint می‌تونی زوایای خاص رو در نظر بگیری و مقداردهی کنی.

پاسخ خیلی تشریحی روش اول:

گام اول: θ و α متمم و θ و β مکمل هستند، پس اگر فرض کنیم $\theta=۳۰^\circ$ باشد، $\alpha=۶۰^\circ$ و $\beta=۱۵۰^\circ$ خواهد بود.

گام دوم: روابط گزینه‌ها را چک می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $\sin۱۵۰^\circ+\cos۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱\neq۰$ ✗

گزینهٔ (۲): $\cos۱۵۰^\circ+\sin۶۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰$ ✓

گزینهٔ (۳): $\cos۳۰^\circ-\cos۱۵۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\sqrt{۳}\neq۰$ ✗

گزینهٔ (۴): $\sin۳۰^\circ+\cos۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱\neq۰$ ✗

روش دوم:

گام اول: θ و α متمم و θ و β مکمل هستند، پس داریم:

$$\begin{cases}\theta+\alpha=\frac{\pi}{۲}\\ \theta+\beta=\pi\end{cases}\Rightarrow\beta-\alpha=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\beta=\alpha+\frac{\pi}{۲}$$

گام دوم: اگر $\cos\beta$ را حساب کنیم، داریم:

$$\cos\beta=\cos(\alpha+\frac{\pi}{۲})=-\sin\alpha\Rightarrow\cos\beta+\sin\alpha=۰$$

AzmoonFree.ir

۱۰ حاصل عبارت $P=\frac{۲\sin ۲۵۲^\circ-\cos ۱۹۸^\circ}{۳\cos ۱۶۲^\circ+\sin ۱۰۸^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

Hint اگر دقت کنی تو همهٔ زوایا ۱۸° رو می‌بینی.

درس Box

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های به شکل $k\pi\pm\alpha$

زاویهٔ α را حاده در نظر می‌گیریم. در آن طرف مساوی همان نسبت را برای α می‌نویسیم (مثلاً $\sin(k\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$)، سپس مشخص می‌کنیم که $k\pi\pm\alpha$ در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد. اگر نسبت اولیه در آن ناحیه مثبت بود، پشتِ حاصل مثبت و اگر منفی بود، پشتِ حاصل منفی قرار می‌دهیم، نگاه کنید:

$\sin(\overbrace{۲\pi-\alpha}^{\text{ربع چهارم }(\sin<۰)})=\ominus\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(\overbrace{۳\pi+\alpha}^{\text{ربع سوم }(\cos<۰)})=\ominus\cos\alpha$

$\sin(\overbrace{\pi-\alpha}^{\text{ربع دوم }(\sin>۰)})=\oplus\sin\alpha$ $\quad$ $\tan(\overbrace{\pi+\alpha}^{\text{ربع سوم }(\tan>۰)})=\oplus\tan\alpha$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های به شکل $\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha$ (k فرد)

α را حاده در نظر می‌گیریم. اگر $\sin$ داشتیم در آن طرف مساوی می‌نویسیم $\cos\alpha$ (و بالعکس) و اگر $\tan$ داشتیم در آن طرف مساوی می‌نویسیم $\cot\alpha$ (و بالعکس)، سپس تعیین می‌کنیم که $\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha$ در کدام ربع مثلثاتی قرار می‌گیرد. اگر نسبت اولیه در آن‌جا مثبت بود، پشت حاصل، مثبت قرار می‌دهیم و اگر منفی بود، پشت حاصل منفی قرار می‌دهیم. نگاه کنید:

$\sin(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}+\alpha}^{\text{ربع چهارم }(\sin<۰)})=\ominus\cos\alpha$ $\quad$ $\cos(\overbrace{\frac{\pi}{۲}+\alpha}^{\text{ربع دوم }(\cos<۰)})=\ominus\sin\alpha$

$\tan(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}-\alpha}^{\text{ربع سوم }(\tan>۰)})=\oplus\cot\alpha$ $\quad$ $\cot(\overbrace{\frac{\pi}{۲}+\alpha}^{\text{ربع دوم }(\cot<۰)})=\ominus\tan\alpha$

خلاصه بگم! $k\pi$ نسبت رو عوض نمی‌کنه، ولی $\frac{k\pi}{۲}$ (k فرد) نسبت رو عوض می‌کنه. برای تعیین علامت هم کافیه ببینی که عبارت داخل پرانتز در کدوم ربع قرار می‌گیره.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: همهٔ زوایا را برحسب زاویهٔ ۱۸° می‌نویسیم؛ زیرا با نزدیک‌ترین مضرب ۹۰°، فقط ۱۸° اختلاف دارند:

$\sin ۲۵۲^\circ=\sin(۲۷۰^\circ-۱۸^\circ)=-\cos ۱۸^\circ$

$\cos ۱۹۸^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۱۸^\circ)=-\cos ۱۸^\circ$

$\cos ۱۶۲^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۱۸^\circ)=-\cos ۱۸^\circ$

$\sin ۱۰۸^\circ=\sin(۹۰^\circ+۱۸^\circ)=\cos ۱۸^\circ$

گام دوم: مقدار عبارت P را حساب می‌کنیم:

$$P=\frac{۲(-\cos ۱۸^\circ)-(-\cos ۱۸^\circ)}{۳(-\cos ۱۸^\circ)+(\cos ۱۸^\circ)}=\frac{-\cos ۱۸^\circ}{-۲\cos ۱۸^\circ}=\frac{۱}{۲}$$

AzmoonFree.ir

۱۱ برای نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حادهٔ x، رابطهٔ $\sin^۴ x - ۴\cos^۴ x = ۳\sin^۲ x \cos^۲ x$ برقرار است. حاصل عبارت $P = \frac{۳\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا عبارت P را به گونهٔ دیگری می‌نویسیم. اگر صورت و مخرج آن را بر $\cos x$ تقسیم کنیم، داریم:

$$P = \frac{۳\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}} = \frac{۳\tan x - ۱}{\tan x + ۱} \qquad (*)$$

گام دوم: پس برای محاسبهٔ P، فقط به $\tan x$ نیاز داریم. برای محاسبه $\tan x$ نیز طرفین تساوی فرض سؤال را بر $\sin^۲ x \cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\sin^۴ x}{\sin^۲ x \cos^۲ x}}_{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}} - \underbrace{\frac{۴\cos^۴ x}{\sin^۲ x \cos^۲ x}}_{\frac{۴\cos^۲ x}{\sin^۲ x}} = \frac{۳\sin^۲ x \cos^۲ x}{\sin^۲ x \cos^۲ x} \Rightarrow \tan^۲ x - \frac{۴}{\tan^۲ x} = ۳$$

$$\xrightarrow[\tan x \neq ۰]{\times \tan^۲ x} \tan^۴ x - ۴ = ۳\tan^۲ x$$

$$\Rightarrow \tan^۴ x - ۳\tan^۲ x - ۴ = ۰$$

گام سوم: برای حل معادله از متغیر جدید $k = \tan^۲ x$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow k^۲ - ۳k - ۴ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} k_۱ = -۱, k_۲ = ۴$$

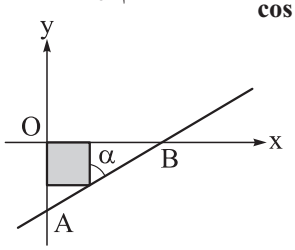
$\tan^۲ x$ که نمی‌تواند منفی باشد، پس $\tan^۲ x = ۴$ است. از طرفی x حاده است و تانژانت آن مثبت، پس $\tan x = ۲$ است.

گام چهارم: طبق رابطهٔ $(*)$ مقدار عبارت P به دست می‌آید:

$$P = \frac{۳(۲) - ۱}{(۲) + ۱} = \frac{۵}{۳}$$

AzmoonFree.ir

۱۲ در شکل زیر، مساحت مثلث AOB، $\frac{۸}{۳}$ برابر مساحت مربع رنگی است. حاصل عبارت $P=\frac{۴\sin\alpha\cos\alpha-۱}{\cos^۲\alpha}$ کدام می‌تواند باشد؟



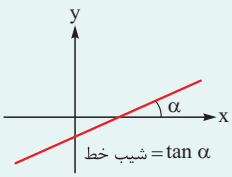
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\frac{۴}{۳}$

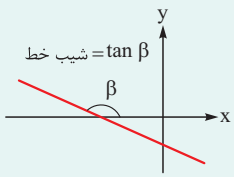
Hint باید شیب خط رو حساب کنی. شیب خط و مثلثات چه ارتباطی دارن؟ ... *آفرین، تانژانت.*

درس Box

شیب خط و تانژانت

در معادلهٔ خط $y=ax+b$ ، شیب خط که همان a باشد، برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با قسمت مثبت محور x ها می‌سازد:



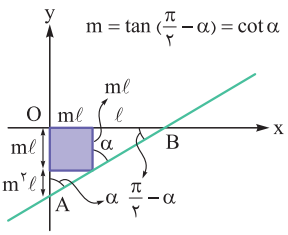


اتحادهای مثلثاتی

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\ ,\ \tan\alpha\cot\alpha=۱$$

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+\tan^۲\alpha\ ,\ \frac{۱}{\sin^۲\alpha}=۱+\cot^۲\alpha$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** فرض می‌کنیم شیب خط برابر m باشد، پس داریم:



پس روی شکل مسئله، اندازه‌های لازم را برحسب m داریم.

گام دوم: فرض مسئله را پیاده می‌کنیم: مساحت مثلث AOB ، $\frac{۸}{۳}$ برابر مساحت مربع است.

$$\Rightarrow \frac{(m+۱)\ell\times(m+m^۲)\ell}{۲}=\frac{۸}{۳}m^۲\ell^۲ \Rightarrow \frac{m(m+۱)^۲}{۲}=\frac{۸}{۳}m^۲ \xrightarrow{\div m} m^۲+۲m+۱=\frac{۱۶}{۳}m$$

$$\Rightarrow m^۲-\frac{۱۰}{۳}m+۱=۰ \Rightarrow (m-\frac{۱}{۳})(m-۳)=۰ \Rightarrow m=\frac{۱}{۳}\ \text{یا}\ ۳$$

گام سوم: پس $\cot\alpha$ برابر $\frac{۱}{۳}$ یا ۳ و در نتیجه $\tan\alpha$ برابر ۳ یا $\frac{۱}{۳}$ است. حال عبارت P را برحسب $\tan\alpha$ ساده می‌کنیم:

$$P=\frac{۴\sin\alpha\cos\alpha-۱}{\cos^۲\alpha}=۴\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحادهای درس باکس}} P=۴\tan\alpha-(۱+\tan^۲\alpha)=-\tan^۲\alpha+۴\tan\alpha-۱$$

گام چهارم: مقادیر $\tan\alpha=۳$ و $\tan\alpha=\frac{۱}{۳}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\tan\alpha=۳: P=-۹+۱۲-۱=۲$$

$$\tan\alpha=\frac{۱}{۳}: P=-\frac{۱}{۹}+\frac{۴}{۳}-۱=\frac{۲}{۹}$$

AzmoonFree.ir

۱۳ به ازای چند عدد طبیعی و یک‌رقمی a، تابع $y = ۲\sin\frac{ax}{۴}$ روی بازهٔ $(\pi,۲\pi)$ غیریکنوا است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

شامل حداقل یک ماکزیمم یا مینیمم است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای این‌که تابع داده‌شده روی بازهٔ $(\pi,۲\pi)$ غیریکنوا باشد، کافی است این بازه شامل حداقل یک نقطهٔ ماکزیمم یا حداقل یک نقطهٔ مینیمم باشد.

گام دوم: این را می‌دانیم که نقاط به طول $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ماکزیمم یا مینیمم نمودار تابع سینوس هستند. طول این نقاط در تابع $y = ۲\sin\frac{ax}{۴}$ به $\frac{k\pi+\frac{\pi}{۲}}{\frac{a}{۴}} = \frac{(۴k+۲)\pi}{a}$ تبدیل می‌شود. برای غیریکنوایی، این نقاط باید درون بازهٔ $(\pi,۲\pi)$ باشند:

$$\Rightarrow \pi < \frac{۴k+۲}{a}\pi < ۲\pi \Rightarrow ۱ < \frac{۴k+۲}{a} < ۲ \xrightarrow{a\text{ مثبت است.}} ۲k+۱ < a < ۲(۲k+۱)$$

گام سوم: در بین اعداد طبیعی یک‌رقمی داریم:

$k = ۰ : ۱ < a < ۲ \Rightarrow \varnothing$

$k = ۱ : ۳ < a < ۶ \Rightarrow a = ۴,۵$

$k = ۲ : ۵ < a < ۱۰ \Rightarrow a = ۶,۷,۸,۹$

در نتیجه شش مقدار طبیعی و تک‌رقمی برای a پیدا می‌شود.

AzmoonFree.ir

۱۴ اندازهٔ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=2a-1-3\sin\frac{\pi x}{a}$ از اندازهٔ ماکزیمم آن یک واحد بیشتر است. کم‌ترین مقدار تابع $y=\frac{1}{a}f(x)+a$ کدام است؟

۱) $-\frac{13}{12}$ ۲) $-\frac{13}{6}$

۳) $-\frac{17}{6}$ ۴) $-\frac{17}{12}$

Hint باز هم اون سه فرمول مهم، فقط یک معادلهٔ قدرمطلقی هم لابه‌لاش باید حل کنی.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا اندازهٔ دورهٔ تناوب و اندازهٔ ماکزیمم تابع را حساب می‌کنیم:

بیشترین مقدار: $\max\{f(x)\}=2a-1+|-3|=2a+2$

دورهٔ تناوب: $T_f=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{|a|}}=2|a|$

گام دوم: فرض مسئله را پیاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{T_f-\max\{f(x)\}=1} 2|a|-2a-2=1 \Rightarrow |a|-a=\frac{3}{2}$$

واضح است که a منفی است، چون اگر مثبت باشد به تساوی غیرممکنِ $\frac{3}{2}=0$ می‌رسیم.

$$\xrightarrow{a<0} -a-a=-2a=\frac{3}{2} \Rightarrow a=-\frac{3}{4}$$

گام سوم: ضابطهٔ تابع f را تکمیل می‌کنیم:

$$f(x)=\underbrace{-\frac{5}{2}}_{2a-1}-3\sin\frac{\pi x}{-\frac{3}{4}} \Rightarrow f(x)=-\frac{5}{2}+3\sin\frac{4\pi x}{3}$$

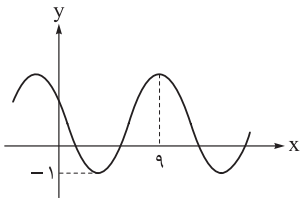
و سپس ضابطهٔ تابع $y=\frac{1}{a}f(x)+a$ را می‌نویسیم:

$$y=\frac{1}{-\frac{3}{4}}\left(-\frac{5}{2}+3\sin\frac{4\pi x}{3}\right)-\frac{3}{4} \Rightarrow y=\frac{10}{3}-4\sin\frac{4\pi x}{3}-\frac{3}{4} \Rightarrow y=\frac{31}{12}-4\sin\frac{4\pi x}{3}$$

کم‌ترین مقدار این تابع برابر $\frac{31}{12}-4=-\frac{17}{12}$ است.

AzmoonFree.ir

۱۵ قسمتی از نمودار تابع $f(x)=۱+a\sin(b\pi x)$ به صورت زیر است. دورهٔ تناوب تابع $g(x)=\cos(\frac{x}{ab})$ کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۴}$

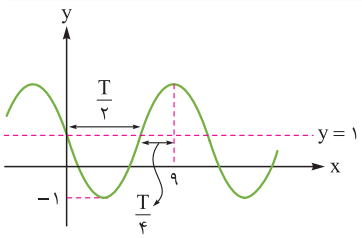
۲) $\frac{۲\pi}{۳}$

۳) $\frac{\pi}{۲}$

۴) $\frac{\pi}{۳}$

Hint ببین انتقال افقی داریم یا نه؟ اگر نداریم دورهٔ تناوب مشخصه و از اون فرمول‌های مهم استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی



گام اول: عرض از مبدأ تابع برابر ۱ است و خط $y=۱$، خط وسط نمودار تابع است.

این خط را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل و اندازه‌های روی آن، $\frac{۳}{۴}$ برابر دورهٔ تناوب، برابر ۹ شده است:

$$\frac{T}{۲}+\frac{T}{۴}=\frac{۳T}{۴}=۹ \Rightarrow T=۱۲$$

گام دوم: مقدار مینیمم تابع را هم داریم، پس از فرمول‌های مهم استفاده می‌کنیم:

$$y_{min}=۱-|a|=-۱ \Rightarrow |a|=۲$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|\pi}=\frac{۲}{|b|}=۱۲ \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۶}$$

گام سوم: دورهٔ تناوب تابع $g(x)=\cos\frac{x}{ab}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

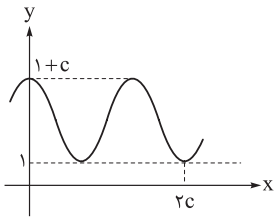
$$T_g=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{|ab|}}=۲|a||b|\pi$$

و با مقادیر به‌دست‌آمده در گام دوم داریم:

$$T_g=۲\times۲\times\frac{۱}{۶}\pi=\frac{۲}{۳}\pi$$

AzmoonFree.ir

۱۶ قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin^{۲}(a\pi x)$ به صورت زیر است. مقدار b کدام است؟



۱) $-۰/۵$

۲) $۰/۷۵$

۳) $-۰/۷۵$

۴) $۰/۵$

Hint فرمول‌های ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب رو بنویس، ولی با یه کم تغییر.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به ازای $x=۰$ مقدار ماکزیمم رخ داده است:

$$y_{max}=۱+c \Rightarrow f(۰)=a=۱+c \quad (۱)$$

و به ازای $\sin^{۲}=۱$ مقدار مینیمم تابع رخ داده است:

$$y_{min}=۱ \Rightarrow a+b=۱ \quad (۲)$$

گام دوم:

نکته دورهٔ تناوب تابع $y=\sin^{۲n} mx$ از رابطهٔ $\frac{\pi}{|m|}$ به دست می‌آید. دقت دارید که با فرمول اصلی، یک عدد ۲ فرق دارد.

در این سؤال، با توجه به نمودار، $۲c$ یک و نیم برابر دورهٔ تناوب تابع است:

$$\Rightarrow \frac{۳T}{۲}=۲c \Rightarrow T=\frac{۴c}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{نکته}} \frac{\pi}{|a|\pi}=\frac{۴c}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{|a|}=\frac{۴c}{۳} \Rightarrow |a|c=\frac{۳}{۴} \quad (۳)$$

گام سوم: دستگاه سه معادله ـ سه مجهول را حل می‌کنیم. فقط دقت کنید که a مثبت است. *(از روی شکل تابلو نیست؟)*

$$\begin{cases} a-c=۱ \\ a+b=۱ \\ ac=\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

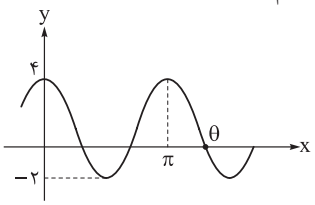
از معادلهٔ اول $c=a-۱$ را در معادلهٔ سوم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a(a-۱)=\frac{۳}{۴} \Rightarrow \underbrace{۴a^{۲}-۴a}_{۴a^{۲}-۴a+۱-۱}=۳ \Rightarrow (۲a-۱)^{۲}=۴ \Rightarrow ۲a-۱=\pm ۲$$

$$\xrightarrow{a>۰} ۲a-۱=۲ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} b=-\frac{۱}{۲}$$

AzmoonFree.ir

۱۷ بخشی از نمودار تابع $f(x)=a+b\cos cx$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $\sin^{۲}۲\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۸}{۹}$

۴) $\frac{۴}{۹}$

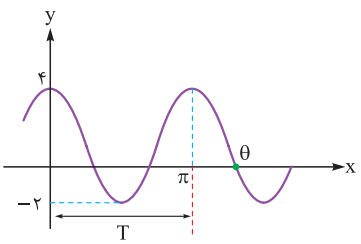
Hint سه‌تا رابطهٔ کلیدی و مهم رو فراموش نکن، همه‌جا کارسازه.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا باید ضابطهٔ تابع را پیدا کنیم، یعنی پیداکردن مقادیر پارامترهای a، b و c. از روابط مهم y_{max} ، y_{min} و T استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_{max}=۴ \Rightarrow a+|b|=۴ \\ y_{min}=-۲ \Rightarrow a-|b|=-۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۲a=۲ \Rightarrow a=۱ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} |b|=۳$$

فاصلهٔ دو ماکزیمم متوالی تابع برابر π است، پس $T=\pi$ است.

$$\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|c|}=\pi \Rightarrow |c|=۲$$



گام دوم: حال در مورد علامت پارامترها صحبت کنیم.

نمودار تابع کسینوسی بدون انتقال افقی، در $x=۰$ ماکزیمم دارد، پس ضریب آن یعنی b مثبت است. تابع کسینوس نسبت به علامت کمان ورودی خنثی است؛ یعنی فرقی نمی‌کند c مثبت باشد یا منفی.

در نهایت ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=۱+۳\cos ۲x$ نوشته می‌شود.

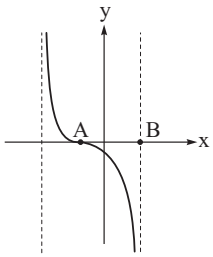
گام سوم: $x=\theta$ یکی از صفرهای تابع است، یعنی $f(\theta)=۰$ است و داریم:

$$f(\theta)=۱+۳\cos ۲\theta=۰ \Rightarrow \cos ۲\theta=-\frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{\sin^{۲}+\cos^{۲}=۱} \sin^{۲}۲\theta=۱-\cos^{۲}۲\theta=۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

AzmoonFree.ir

۱۸ نمودار تابع $y = ۱ + \tan(ax - \frac{\pi}{۳})$ در یک دورهٔ تناوب به صورت زیر است. اگر طول پاره‌خط **AB** برابر π باشد، مقدار **a** کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۲}$

۲) $-\frac{۳}{۴}$

۳) $-\frac{۱}{۴}$

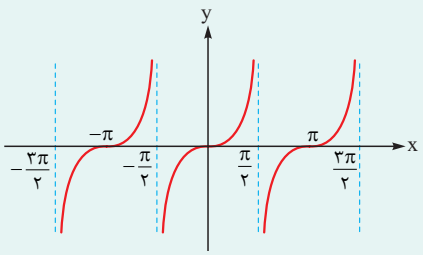
۴) $-\frac{۲}{۳}$

Hint از روش تبدیل نمودار برو، ببین چه‌جوری $y = \tan x$ به نمودار $y = ۱ + \tan(ax - \frac{\pi}{۳})$ تبدیل می‌شه؟

درس Box

نمودار تابع تانژانت

نمودار تابع $y = \tan x$ با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{۲} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ به صورت زیر است:



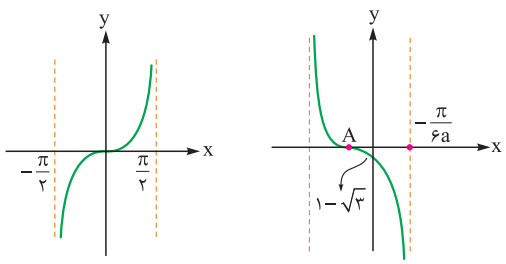
در این نمودار:

- مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$، مجانب‌های قائم هستند.
- دورهٔ تناوب تابع فاصلهٔ بین دو مجانب قائم متوالی است.
- صفرهای تابع مضارب صحیح π هستند.
- این تابع روی هر بازه از دامنه‌اش اکیداً صعودی است، اما روی دامنه‌اش غیریکنواست.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ابتدا باید بگوییم که a منفی است؛ زیرا تابع صورت سؤال اکیداً نزولی است.

گام دوم: برای رسم نمودار تابع صورت سؤال، ابتدا نمودار تابع $y = \tan x$ را $\frac{\pi}{۳}$ واحد به راست می‌بریم؛ سپس طول نقاط آن را بر a تقسیم می‌کنیم و در انتها ۱ واحد به بالا می‌بریم:



$y = \tan x$ $\qquad$ $y = ۱ + \tan(ax - \frac{\pi}{۳})$

گام سوم: طول نقطهٔ A را پیدا می‌کنیم. در x_A مقدار تابع برابر صفر است:

$$\xrightarrow{x_A} ۱ + \tan(ax_A - \frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow \tan(ax_A - \frac{\pi}{۳}) = -۱$$

$$\xrightarrow{a \text{ منفی است.}} \tan(\underbrace{-ax_A + \frac{\pi}{۳}}_{\text{مثبت شده است.}}) = ۱ = \tan(\underbrace{\frac{\pi}{۴}}_{\text{اولین کمان مثبتی که تانژانت آن برابر ۱ است.}}) \Rightarrow -ax_A + \frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow x_A = \frac{\frac{\pi}{۱۲}}{a} = \frac{\pi}{۱۲a}$$

گام چهارم: طول پاره‌خط AB را برابر π قرار می‌دهیم:

$$x_B - x_A = -\frac{\pi}{۶a} - \frac{\pi}{۱۲a} = -\frac{۳\pi}{۱۲a} = -\frac{\pi}{۴a} = \pi \Rightarrow ۴a = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

AzmoonFree.ir

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

۱۹ چه تعداد از متغیرهای «مدت‌زمان تأثیر دارو ـ مسافت مسیر پرتاب نیزه ـ تعداد کلاس‌های مدرسه ـ تعداد فرزندان یک خانواده» گسسته هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره مبحث رفع خستگی، یک بار برای همیشه یادش بگیر.

درس Box

متغیر کمّی: متغیری که مقادیر عددی می‌گیرد و برای آن عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و معدل‌گیری قابل انجام است. متغیرهای کمّی دو نوع هستند:

۱) متغیر کمّی پیوسته: متغیری که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند. مثل مدت‌زمان پاسخ‌گویی به یک تست.

۲) متغیر کمّی گسسته: متغیری که پیوسته نباشد. مثل تعداد شرکت‌کنندگان در آزمون سراسری.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

مدت‌زمان تأثیر دارو و مسافت مسیر پرتاب نیزه هر عددی را می‌توانند اختیار کنند؛ بنابراین متغیرهای کمّی پیوسته هستند. تعداد کلاس‌های مدرسه و تعداد فرزندان یک خانواده متغیرهای کمّی گسسته هستند. زیرا مثلاً نمی‌توان گفت یک خانواده دارای ۲/۵ فرزند است یا یک مدرسه دارای $\sqrt{۷}$ کلاس است.

AzmoonFree.ir

۲۰ نقاط (a,b) روی منحنی $y=\frac{5x-2}{x+1}$ قرار دارند. اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ باشند، چند نقطه با این ویژگی روی این منحنی قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره بخش نظریهٔ اعداد پای ثابت آزمون‌هاست؛ پس حسابی وقت بذار براش.

Hint

$\frac{m}{n}\in\mathbb{Z} \Rightarrow n\mid m$

نکته

۱) $a\mid b \Rightarrow a\mid mb \quad (m\in\mathbb{Z})$

۲) $a\mid b\wedge a\mid c \Rightarrow a\mid mb\pm nc \quad (m,n\in\mathbb{Z})$

۳) $a\mid a$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای آن‌که $y=\frac{5x-2}{x+1}$، عددهای صحیح باشد باید $5x-2$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد، یعنی $5x-2$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد، یعنی $x+1\mid 5x-2$.

گام دوم: با استفاده از نکات (۲) و (۳)، داریم:

$$\begin{cases} x+1\mid x+1 \\ x+1\mid 5x-2 \end{cases} \Rightarrow x+1\mid 5(x+1)-(5x-2) \Rightarrow x+1\mid 7 \Rightarrow x+1=\pm1,\pm7$$

گام سوم: برای هر یک از مقادیر x، مقدار y را به دست می‌آوریم:

$x+1=1 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=-2$ ✓

$x+1=-1 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=12$ ✓

$x+1=7 \Rightarrow x=6 \Rightarrow y=4$ ✓

$x+1=-7 \Rightarrow x=-8 \Rightarrow y=6$ ✓

بنابراین چهار نقطه با مؤلفه‌های صحیح برای زوج مرتب (x,y) وجود دارد.

AzmoonFree.ir

۲۱ از رابطهٔ $16x \overset{48}{\equiv} 12y$ کدام نتیجه را نمی‌توان گرفت؟

۱) $y \overset{4}{\equiv} 0$

۲) $x \overset{3}{\equiv} 0$

۳) $4x \overset{24}{\equiv} 3y$

۴) $3y \overset{12}{\equiv} 4x$

Hint برو سراغ ویژگی‌های همنهشتی!

نکته

۱) $ac \overset{m}{\equiv} bc , (c,m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b , n \mid m \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا طرفین همنهشتی را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

(۴) گزینهٔ: $16x \overset{48}{\equiv} 12y \xrightarrow[(4,48)=4]{\text{نکتهٔ (۱)}} 4x \overset{12}{\equiv} 3y$ ✓

(۱) گزینهٔ: $4x \overset{12}{\equiv} 3y \xrightarrow{4 \mid 12} 4x \overset{4}{\equiv} 3y \Rightarrow 0 \overset{4}{\equiv} 3y \Rightarrow y \overset{4}{\equiv} 0$ ✓

(۲) گزینهٔ: $4x \overset{12}{\equiv} 3y \xrightarrow{3 \mid 12} 4x \overset{3}{\equiv} 3y \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 0$ ✓

(۳) گزینهٔ: $4x \overset{24}{\equiv} 3y$ ✗ مثال نقض: $x = 3, y = 8$

AzmoonFree.ir

۲۲ اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی **n**، دو عدد $۹n+۵$ و $۷n-۴$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۶۱ ۲) ۷۱ ۳) ۸۳ ۴) ۹۷

Hint

$(a,b)=d \Rightarrow d\mid a\,,\,d\mid b$

درس Box

تعریف: عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه:

الف) $d\mid a\,,\,d\mid b$

ب) $\forall m>۰\,;\,m\mid a\,,\,m\mid b \Rightarrow m\le d$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرض کنیم $(۷n-۴\,,\,۹n+۵)=d$؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} d\mid ۹n+۵ \\ d\mid ۷n-۴ \end{cases}$$

گام دوم: می‌دانیم اگر $d\mid a$ و $d\mid b$، آن‌گاه $d\mid ma+nb$؛ پس داریم:

$$d\mid ۷(۹n+۵)-۹(۷n-۴) \Rightarrow d\mid ۷۱ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۷۱$$

گام سوم: چون $۹n+۵$ و $۷n-۴$ نسبت به هم اول نیستند $d\neq ۱$؛ پس $d=۷۱$ قابل قبول است.

AzmoonFree.ir

۲۳ اگر $a|b$ و $a|c$، کدام نتیجه‌گیری لزوماً درست نیست؟

۱) $a|b+c$

۲) $a|b^2+c$

۳) $a^2|b+c$

۴) $a^2|bc$

Hint

برو سراغ ویژگی‌های عادکردن.

نکته

۱) $a|b, a|c \Rightarrow a|mb \pm nc$

۲) $a|b \Rightarrow a|b^n$

۳) $a|b, c|d \Rightarrow ac|bd$

پاسخ خیلی تشریحی

(۱) گزینهٔ: $a|b, a|c \xrightarrow{\text{نکتهٔ (۱)}} a|b+c$ ✓

(۲) گزینهٔ: $a|b \xrightarrow{\text{نکتهٔ (۲)}} a|b^2, a|c \xrightarrow{\text{نکتهٔ (۱)}} a|b^2+c$ ✓

(۳) گزینهٔ: $a=2, b=6, c=8 \Rightarrow 2|6, 2|8 \Rightarrow 2^2|6+8 \Rightarrow 4|14$ ✗

(۴) گزینهٔ: $a|b, a|c \xrightarrow{\text{نکتهٔ (۳)}} a^2|bc$ ✓

AzmoonFree.ir

۲۴ اگر a عددی صحیح و فرد و $a+۱۲$ بر b بخش‌پذیر باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^۲+b^۲+۱۹$ بر ۸، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

نکته مربع هر عدد فرد به شکل $۸k+۱$ نوشته می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم a عددی صحیح و فرد است، بنابراین $a+۱۲$ نیز فرد است؛ پس شمارندهٔ آن یعنی b نیز فرد است.

گام دوم: طبق نکتهٔ بالا، مربع هر عدد فرد به شکل $۸k+۱$ است؛ پس:

$$a^۲=۸k+۱\ ,\ b^۲=۸k'+۱$$

گام سوم:

$$a^۲+b^۲+۱۹=(۸k+۱)+(۸k'+۱)+۱۹=۸(k+k')+۲۱=۸(k+k')+۱۶+۵=۸\underbrace{(k+k'+۲)}_{q}+۵=۸q+۵$$

پس باقی‌ماندهٔ $a^۲+b^۲+۱۹$ بر ۸، برابر عدد ۵ است.

AzmoonFree.ir

۲۵ اگر a، b و c سه عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشند به طوری که $a^{۲} \mid b^{۳}$ و $b^{۴} \mid c^{۵}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a^{۵} \mid c^{۹}$

۲) $a^{۶} \mid c^{۱۱}$

۳) $a^{۷} \mid b^{۱۰}$

۴) $a^{۸} \mid c^{۱۵}$

نکته

۱) $a \mid b \Rightarrow a^{n} \mid b^{n}$

۲) $a \mid b \ , \ b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (خاصیت تعدّی)

پاسخ خیلی تشریحی

$$\begin{cases} a^{۲} \mid b^{۳} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۴}} a^{۸} \mid b^{۱۲} \\ b^{۴} \mid c^{۵} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} b^{۱۲} \mid c^{۱۵} \end{cases} \xrightarrow{\text{خاصیت تعدّی}} a^{۸} \mid c^{۱۵}$$

مثال نقض بقیهٔ گزینه‌ها:

$a = ۲^{۱۵} \ , \ b = ۲^{۱۰} \ , \ c = ۲^{۸}$

گزینهٔ (۱): $(۲^{۱۵})^{۵} \mid (۲^{۸})^{۹} \Rightarrow ۲^{۷۵} \mid ۲^{۷۲}$ ✗

گزینهٔ (۲): $(۲^{۱۵})^{۶} \mid (۲^{۸})^{۱۱} \Rightarrow ۲^{۹۰} \mid ۲^{۸۸}$ ✗

گزینهٔ (۳): $(۲^{۱۵})^{۷} \mid (۲^{۱۰})^{۱۰} \Rightarrow ۲^{۱۰۵} \mid ۲^{۱۰۰}$ ✗

AzmoonFree.ir

۲۶ چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۴۰ وجود دارد که دارای چهار مقسوم‌علیه طبیعی باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

Hint یعنی به‌جز ۱ و خودش باید دو مقسوم‌علیه طبیعی دیگر داشته باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عدد باید به صورت $n = pq$ که p و q دو عدد اول متمایزاند یا به صورت $n = p^3$ باشد.

۱) $n = pq \Rightarrow$ مقسوم‌علیه‌های $n = \{1, p, q, pq\}$

۲) $n = p^3 \Rightarrow$ مقسوم‌علیه‌های $n = \{1, p, p^2, p^3\}$

گام دوم: عددهای به فرم p^3 و کوچک‌تر از ۴۰ برابرند با:

$2^3, 3^3$

گام سوم: عددهای به فرم pq و کوچک‌تر از ۴۰ برابرند با:

$2\times3, 2\times5, 2\times7, 2\times11, 2\times13, 2\times17, 2\times19$

$3\times5, 3\times7, 3\times11, 3\times13$

5×7

گام چهارم: بنابراین $۱۲ + ۲ = ۱۴$ عدد کوچک‌تر مساوی ۴۰ با چهار مقسوم‌علیه طبیعی وجود دارد.

AzmoonFree.ir

۲۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۷\times(۱۵^{۴۳}-۱۸^{۴۳})$ بر عدد ۳۰ چه‌قدر است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

مشاوره همنهشتی‌وبخش‌پذیری
از مباحث مهم نظریهٔ اعداد است که با حل تست‌های مختلف می‌تونی تسلط نسبی روی این مبحث پیدا کنی. ازش نترس و برو سراغش.

نکته

۱) $ac\overset{m}{\equiv}bc,(c,m)=d \Rightarrow a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$

۲) $\begin{cases}a\overset{m}{\equiv}b\\ a\overset{n}{\equiv}b\end{cases}\Rightarrow a\overset{[m,n]}{\equiv}b$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت داده‌شده را بر ۵ و ۶ به دست می‌آوریم:

گام دوم:

$$۱۸\overset{۵}{\equiv}۳,۱۵\overset{۵}{\equiv}۰\Rightarrow ۱۵^{۴۳}\overset{۵}{\equiv}۰$$

$$۳^{۲}\overset{۵}{\equiv}-۱\Rightarrow ۳^{۴۲}\overset{۵}{\equiv}-۱\Rightarrow ۳^{۴۳}\overset{۵}{\equiv}-۳$$

$$۱۸^{۴۳}-۱۵^{۴۳}\overset{۵}{\equiv}-۳\xrightarrow{\times ۷}(۱۸^{۴۳}-۱۵^{۴۳})\times ۷\overset{۵}{\equiv}-۲۱\overset{۵}{\equiv}۹$$

گام سوم:

$$۱۸\overset{۶}{\equiv}۰,۱۵\overset{۶}{\equiv}۳$$

$$۳^{۲}\overset{۶}{\equiv}۳\Rightarrow ۳^{۴۳}\overset{۶}{\equiv}۳$$

$$۱۸^{۴۳}-۱۵^{۴۳}\overset{۶}{\equiv}-۳\xrightarrow{\times ۷}(۱۸^{۴۳}-۱۵^{۴۳})\times ۷\overset{۶}{\equiv}-۲۱\overset{۶}{\equiv}۹$$

گام چهارم: از گام‌های دوم و سوم نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases}(۱۸^{۴۳}-۱۵^{۴۳})\times ۷\overset{۵}{\equiv}۹\\ (۱۸^{۴۳}-۱۵^{۴۳})\times ۷\overset{۶}{\equiv}۹\end{cases}\xrightarrow{\text{نکتهٔ (۲)}}(۱۸^{۴۳}-۱۵^{۴۳})\times ۷\overset{[۶,۵]=۳۰}{\equiv\equiv\equiv}۹$$

AzmoonFree.ir

۲۸ تعداد اعداد سه‌رقمی a به طوری که $13^a \overset{17}{\equiv} 1$ کدام است؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۷۵ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۲۵

Hint دنبال توانی از ۱۳ باش که در همنهشتی به پیمانهٔ ۱۷ باقی‌ماندهٔ ۱ داشته باشه.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم $13 \overset{17}{\equiv} -4$، پس به جای ۱۳ قرار می‌دهیم -4.

گام دوم: می‌خواهیم $(-4)^a \overset{17}{\equiv} 1$ را داشته باشیم. از $(-4)^2 = 16$ شروع می‌کنیم:

$$(-4)^2 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow (-4)^{2n} \overset{17}{\equiv} (-1)^n$$

برای آن‌که $(-1)^n = 1$ شود باید n زوج باشد؛ پس:

$$n = 2k \Rightarrow a = 2n = 4k$$

گام سوم: دنبال اعداد سه‌رقمی a هستیم:

$$100 \le a < 1000 \Rightarrow 100 \le 4k < 1000 \xrightarrow{\div 4} 25 \le k < 250$$

$$\Rightarrow k = 25, 26, \dots, 249 \Rightarrow \text{۲۲۵ مقدار مختلف}$$

AzmoonFree.ir

هندسه

۲۹ به ازای کدام مجموعه مقادیر k، دستگاه معادلات $\begin{cases}(k+۳)x+۳y=۹\\ ۴x+(k-۱)y=۶\end{cases}$ فاقد جواب است؟

۱) $\{۳\}$

۲) $\{-۵\}$

۳) $\{-۵,-۲\}$

۴) $\{۴,-۲\}$

مشاوره درس‌باکس را حتماً بخوانید و روی حالت‌های مختلف تعداد جواب‌های دستگاه‌های دو معادله، دو مجهول خطی مسلط باشید. این تیپ سؤال‌ها، سؤال‌های پرتکراری در آزمون‌های آزمایشی هستند که تا پایان سال تحصیلی در آزمون‌های بعدی هم با آن‌ها مواجه خواهید شد.

Hint

در دستگاه دو معادله، دو مجهول خطی:

۱) اگر دو خط تشکیل‌دهندهٔ آن بر هم منطبق باشند، بی‌شمار جواب دارد.

۲) اگر دو خط تشکیل‌دهندهٔ آن متقاطع باشند، یک جواب دارد.

۳) اگر دو خط تشکیل‌دهندهٔ آن موازی (غیرمنطبق) باشند، جواب ندارد.

درس Box

اگر دستگاه دو معادله، دو مجهولی $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ را در نظر بگیریم، می‌توان گفت جواب این دستگاه، نقطهٔ مشترک دو خط $L: ax+by=c$ و $L': a'x+b'y=c'$ است؛ پس:

۱) اگر این دو خط بر هم منطبق باشند، یعنی یکی از معادله‌ها ضریبی از معادلهٔ دیگر باشد، یا به عبارت دیگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$، آن‌گاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۲) اگر این دو خط متقاطع باشند، یعنی شیب‌های آن‌ها با هم برابر نباشد، یا به عبارت دیگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$، آن‌گاه دستگاه یک جواب (جواب منحصربه‌فرد) دارد.

۳) اگر این دو خط موازی باشند، یعنی شیب‌های آن‌ها با هم برابر باشد، ولی دو خط بر هم منطبق نباشند، یا به عبارت دیگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$، آن‌گاه دستگاه جواب ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به درس‌باکس، باید این دستگاه معادلات نشان‌دهندهٔ دو خط موازی باشد؛ بنابراین داریم:

$$\underbrace{\frac{k+۳}{۴}=\frac{۳}{k-۱}}_{(*)}\neq\frac{۹}{۶}\xrightarrow{(*)}k^۲-k+۳k-۳=۱۲\Rightarrow k^۲+۲k-۱۵=۰$$

$$(k+۵)(k-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}k=-۵\Rightarrow\frac{۳}{k-۱}=\frac{۳}{-۶}\neq\frac{۹}{۶}\ \checkmark & \text{(موازی‌اند)}\\ k=۳\Rightarrow\frac{۳}{k-۱}=\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۶}\ \times & \text{(منطبق‌اند)}\end{cases}$$

AzmoonFree.ir

۳۰ مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\theta \\ \tan\theta & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & \tan\theta \\ -\tan\theta & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}$ کدام است؟

۱) $۲\cos ۲\theta$ ۲) $۲\sin ۲\theta$

۳) $۲\tan ۲\theta$ ۴) $۲\cot ۲\theta$

مشاوره این سؤال ترکیبی از ماتریس و فرمول‌های مثلثاتی است. سؤال‌های ترکیبی بسیار مورد علاقهٔ طراحان کنکور است.

Hint وارون ماتریس را به دست بیاور و سپس ماتریس مورد نظر را محاسبه کن، البته به شرطی شروع به حل این سؤال کن که روی فرمول‌های مثلثاتی ۲θ مسلط باشی!

درس Box

۱) اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه:

الف) دترمینان ماتریس A به این صورت تعریف می‌شود: $|A|=ad-bc$

ب) با شرط $|A|\neq ۰$، ماتریس A وارون‌پذیر است و داریم: $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

۲) اگر A و B دو ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند به طوری که ضرب‌های ماتریسی بین آن‌ها قابل انجام باشد، آن‌گاه:

$(rA)\times(sB)=(rs)A\times B=A\times(rs)B=(rs)(A\times B)$

۳) یادآوری دو رابطهٔ مثلثاتی: $\sin ۲\theta=\frac{۲\tan\theta}{۱+\tan^۲\theta}$ ، $\cos ۲\theta=\frac{۱-\tan^۲\theta}{۱+\tan^۲\theta}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ ماتریس وارون):

$$\begin{bmatrix} ۱ & \tan\theta \\ -\tan\theta & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\theta \\ \tan\theta & ۱ \end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبهٔ حاصل‌ضرب):

$$\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\theta \\ \tan\theta & ۱ \end{bmatrix}\frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\theta \\ \tan\theta & ۱ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}\begin{bmatrix} ۱-\tan^۲\theta & -۲\tan\theta \\ ۲\tan\theta & ۱-\tan^۲\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱-\tan^۲\theta}{۱+\tan^۲\theta} & \frac{-۲\tan\theta}{۱+\tan^۲\theta} \\ \frac{۲\tan\theta}{۱+\tan^۲\theta} & \frac{۱-\tan^۲\theta}{۱+\tan^۲\theta} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos ۲\theta & -\sin ۲\theta \\ \sin ۲\theta & \cos ۲\theta \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس برابر $۲\cos ۲\theta$ است.

AzmoonFree.ir

۳۱ A و B دو ماتریس وارون‌پذیر ۲×۲ اند؛ اگر $A-B=۲AB$، آن‌گاه حاصل $|B^{-۱}-A^{-۱}|$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۸

۴) صفر

مشاوره گاهی وقت‌ها از یک رابطه بین ماتریس‌ها می‌خواهیم به یک رابطهٔ دیگر برحسب وارون آن‌ها برسیم، در این تیپ از سؤالات طرفین تساوی را در وارون آن ماتریس‌ها ضرب می‌کنیم طوری که بتوانیم ماتریس‌های مورد نظرمان را بسازیم.

Hint رابطهٔ صورت سؤال را از سمت چپ در $A^{-۱}$ و از سمت راست در $B^{-۱}$ ضرب کن.

درس Box

۱) ماتریس I، عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌هاست؛ یعنی $IA=AI=A$.

۲) اگر $A^{-۱}$ وارون ماتریس مربعی A باشد، آن‌گاه: $AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$.

پاسخ خیلی تشریحی رابطه را ابتدا در $A^{-۱}$ از سمت چپ و سپس در $B^{-۱}$ از سمت راست ضرب می‌کنیم:

$$A-B=۲AB \xrightarrow{\times(A^{-۱})\text{ از سمت چپ}} \underbrace{A^{-۱}A}_{I}-A^{-۱}B=۲\underbrace{A^{-۱}A}_{I}B \Rightarrow$$

$$I-A^{-۱}B=۲B \xrightarrow{\times(B^{-۱})\text{ از سمت راست}} B^{-۱}-A^{-۱}\underbrace{BB^{-۱}}_{I}=۲\underbrace{BB^{-۱}}_{I}$$

$$\Rightarrow B^{-۱}-A^{-۱}=۲I \xrightarrow{\text{محاسبهٔ دترمینان}} |B^{-۱}-A^{-۱}|=|۲I|=\begin{vmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{vmatrix}=۲\times۲=۴$$

AzmoonFree.ir

۳۲ اگر $A-B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}$، $A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix}-۵ & ۳\\ ۷ & -۴\end{bmatrix}$ و $B^{-۱}A^{-۱}=\begin{bmatrix}۴ & ۷\\ ۷ & ۱۲\end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲+B^۲$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) صفر

Hint ابتدا ماتریس‌های AB و BA را به دست بیاور و سپس با به توان دوم رساندن $A-B$، ماتریس حاصل $A^۲+B^۲$ را به دست بیاور.

درس Box

برای دو ماتریس وارون‌پذیر ۲×۲ داریم:

الف) $(A\times B)^{-۱}=B^{-۱}\times A^{-۱}$

ب) $(kA)^{-۱}=\frac{۱}{k}A^{-۱}$

پ) $(A^{-۱})^{-۱}=A$

ت) $(A^n)^{-۱}=(A^{-۱})^n$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ AB و BA):

می‌دانیم $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$ و $(BA)^{-۱}=A^{-۱}B^{-۱}$ می‌باشند؛ بنابراین داریم:

$$A^{-۱}B^{-۱}=(BA)^{-۱}=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ -۴ & ۷\end{bmatrix}\Rightarrow BA=\begin{bmatrix}-۵ & ۳\\ ۷ & -۴\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۲۰-۲۱}\begin{bmatrix}-۴ & -۳\\ -۷ & -۵\end{bmatrix}\Rightarrow BA=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۷ & ۵\end{bmatrix}$$

$$B^{-۱}A^{-۱}=(AB)^{-۱}=\begin{bmatrix}۴ & ۷\\ ۷ & ۱۲\end{bmatrix}\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}۴ & ۷\\ ۷ & ۱۲\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۴۸-۴۹}\begin{bmatrix}۱۲ & -۷\\ -۷ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}-۱۲ & ۷\\ ۷ & -۴\end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبهٔ $A^۲+B^۲$):

چون $(A-B)^۲=A^۲-AB-BA+B^۲$ است، پس:

$$A-B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}\xrightarrow{(...)^۲=(...)^۲}(A-B)^۲=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲-AB-BA+B^۲=\begin{bmatrix}-۱ & ۱۲\\ -۳۰ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲-\begin{bmatrix}-۱۲ & ۷\\ ۷ & -۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۷ & ۵\end{bmatrix}+B^۲=\begin{bmatrix}-۱ & ۱۲\\ -۳۰ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲+B^۲=\begin{bmatrix}-۱ & ۱۲\\ -۳۰ & -۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۸ & ۱۰\\ ۱۴ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹ & ۲۲\\ -۱۶ & ۰\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲+B^۲$ برابر با $-۹+۲۲-۱۶+۰=-۳$ است.

AzmoonFree.ir

۳۳ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & |A| \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان $A-I$ کدام است؟

۱) $-۰/۵$ ۲) $۰/۵$ ۳) $۱/۵$ ۴) $-۱/۵$

مشاوره سؤال ساده‌ای است که با دانستن نحوهٔ محاسبهٔ دترمینان ماتریس ۳×۳ به دست می‌آید. مشابه این سؤال هم در کنکور و هم در امتحان نهایی آمد.

درس Box

دترمینان ماتریس ۳×۳

اگر $A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}$ آن‌گاه دترمینان این ماتریس با بسط نسبت به سطر اول، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|A|=a_{۱۱}\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۱۲}\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix}a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۱۳}\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix}a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲}\end{vmatrix}$$

پس دترمینان برحسب سطر اول به صورت

$$|A|=a_{۱۱}\times\begin{vmatrix}a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{vmatrix}-a_{۱۲}\times\begin{vmatrix}a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۱۳}\times\begin{vmatrix}a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲}\end{vmatrix}$$

به دست می‌آید.

نکته دترمینان هر ماتریس ۳×۳ دلخواه را می‌توان برحسب هر سطر و ستونی به دست آورد که حاصل همواره عددی حقیقی و منحصربه‌فرد است. ولی بهتر است براساس سطر یا ستونی بسط دهیم که بیشترین صفر را دارا می‌باشد تا محاسبات ساده‌تر بشود.

به طور کلی علامت هر درایه از ماتریس ۳×۳ در محاسبهٔ دترمینان به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}+ & - & + \\ - & + & - \\ + & - & +\end{bmatrix}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (محاسبهٔ $|A|$)**: برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس A سطر اول را در نظر می‌گیریم:

$$|A|=۱\begin{vmatrix}۱ & ۰ \\ ۱ & -۱\end{vmatrix}-۰+|A|\begin{vmatrix}-۱ & ۱ \\ ۰ & ۱\end{vmatrix}\Rightarrow|A|=-۱-|A|\Rightarrow|A|=\frac{-۱}{۲}$$

گام دوم (محاسبهٔ ماتریس $A-I$ و دترمینان آن):

$$A-I=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -\frac{۱}{۲} \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -\frac{۱}{۲} \\ -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس بالا سطر اول را در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow|A-I|=-\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}-۱ & ۰ \\ ۰ & ۱\end{vmatrix}=-\frac{۱}{۲}\times-۱=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

AzmoonFree.ir

۳۴ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & -۱ & ۲\\ ۰ & ۲ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۳ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه با فرض $ACA+BCB=ACB+BCA+I$، دترمینان ماتریس C کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

درس Box

۱) خاصیت شرکت‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها:

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

۲) خاصیت توزیع‌پذیری ضرب ماتریس‌ها (از راست و چپ):

$$A\times(B+C)=A\times B+A\times C\ ,\ (B+C)\times A=B\times A+C\times A$$

۳) اگر $A=B$، آن‌گاه: $A\times C=B\times C\ ,\ C\times A=C\times B$

۴) اگر $A_۱, A_۲, ..., A_n$ ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $|A_۱A_۲...A_n|=|A_۱||A_۲|...|A_n|$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (تبدیل عبارت صورت سؤال به یک عبارت ساده‌تر): با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب ماتریس، عبارت را ساده می‌کنیم و در نهایت از دو طرف تساوی دترمینان می‌گیریم.

$$ACA+BCB=ACB+BCA+I\Rightarrow ACA-ACB+BCB-BCA=I\Rightarrow AC(A-B)-BC(A-B)=I$$

$$\Rightarrow (AC-BC)(A-B)=I\ \Rightarrow\ (A-B)C(A-B)=I\ \Rightarrow\ |A-B||C||A-B|=|I|=۱$$

گام دوم (محاسبهٔ $|A-B|$):

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & -۱ & ۲\\ ۰ & ۲ & -۱\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A-B=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۱\\ ۰ & -۱ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow |A-B|=۰-(-۱)\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۲\end{vmatrix}+۰=-۲$$

گام سوم (محاسبهٔ $|C|$): با توجه به گام اول و دوم داریم:

$$(-۲)|C|(-۲)=۱\ \Rightarrow\ |C|=\frac{۱}{۴}$$

AzmoonFree.ir

۳۵ اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۲a & ۴b & ۶c\\ ۳a^۲ & ۶b^۲ & ۹c^۲\end{bmatrix}$ برابر k باشد، دترمینان ماتریس $B=\begin{bmatrix}۹bc & ۶ac & ۳ab\\ ۶ & ۴ & ۲\\ ۳a & ۲b & c\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) k ۲) $۲k$ ۳) $\frac{۳}{۲}k$ ۴) $۳k$

Hint

برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس B از عامل‌های مشترک هر سطر یا ستون ماتریس B فاکتور بگیر و سپس آن‌ها را در سطر یا ستون‌های مناسب ضرب کن تا به ماتریس A برسی.

درس Box

اگر تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریسی را در عدد ثابتی ضرب کنید، دترمینان آن ماتریس در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و بالعکس. اگر عدد ثابتی را در یک دترمینان ضرب کنیم، آن عدد ثابت تنها در درایه‌های یک سطر یا یک ستون دلخواه ضرب می‌شوند.

$$k\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ka & kb & kc\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b & kc\\ d & e & kf\\ g & h & ki\end{vmatrix}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (فاکتورگیری در سطر اول و دوم): در ماتریس B می‌توان در سطر اول از ۳ و در سطر دوم از ۲ فاکتور گرفت.

$$|B|=۳\times۲\begin{vmatrix}۳bc & ۲ac & ab\\ ۳ & ۲ & ۱\\ ۳a & ۲b & c\end{vmatrix}$$

گام دوم (فاکتورگیری در ستون اول): هم‌چنین در ماتریس باقی‌مانده می‌توان در ستون اول از ۳ و در ستون دوم از ۲ فاکتور گرفت.

$$|B|=۳^۲\times۲^۲\begin{vmatrix}bc & ac & ab\\ ۱ & ۱ & ۱\\ a & b & c\end{vmatrix}$$

گام سوم (تبدیل ماتریس حاصل به ماتریس A): در مرحلهٔ بعد از عبارت abc در سطر اول فاکتور می‌گیریم و سپس a، b و c را به ترتیب در ستون‌های اول، دوم و سوم ضرب می‌کنیم.

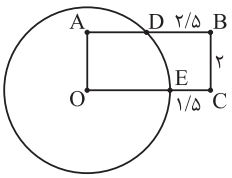
$$|B|=۳^۲\times۲^۲\times abc\begin{vmatrix}\frac{۱}{a} & \frac{۱}{b} & \frac{۱}{c}\\ ۱ & ۱ & ۱\\ a & b & c\end{vmatrix}=۳^۲\times۲^۲\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ a & b & c\\ a^۲ & b^۲ & c^۲\end{vmatrix}$$

سپس سطرهای دوم و سوم را به ترتیب در ۲ و ۳ و در مرحلهٔ آخر ستون‌های دوم و سوم را به ترتیب در ۲ و ۳ ضرب می‌کنیم.

$$|B|=۳\times۲\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۲a & ۲b & ۲c\\ ۳a^۲ & ۳b^۲ & ۳c^۲\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۲a & ۴b & ۶c\\ ۳a^۲ & ۶b^۲ & ۹c^۲\end{vmatrix}=|A|=k$$

AzmoonFree.ir

۳۶ مطابق شکل، **O** مرکز دایره و چهارضلعی **OABC** مستطیل است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟



۱) ۲/۲۵

۲) ۲/۵

۳) ۲/۷۵

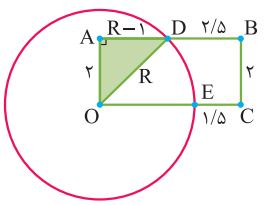
۴) ۳

Hint اندازهٔ AD را برحسب R به دست بیاور و در مثلث AOD از فیثاغورس استفاده کن تا R را به دست بیاوری.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ AD):

اگر شعاع دایره را R بگیریم، آن‌گاه $OE = OD = R$ و چون چهارضلعی مستطیل است، پس $AB = OC$؛ بنابراین $AD + ۲/۵ = R + ۱/۵$ در نتیجه $AD = R - ۱$.



گام دوم (محاسبهٔ R):

در مستطیل OABC داریم: $OA = BC = ۲$ حالا برای محاسبهٔ R از فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAD استفاده می‌کنیم:

$$OD^۲ = OA^۲ + AD^۲$$

$$R^۲ = ۲^۲ + (R-۱)^۲ \Rightarrow R^۲ = ۴ + R^۲ + ۱ - ۲R \Rightarrow R = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

AzmoonFree.ir

۳۷ در دایرهٔ $C(O,R)$، وتر AB به فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}R$ از مرکز دایره واقع است. اگر عمودمنصف وتر AB، دایره را در M و N قطع کند، مساحت چهارضلعی $AMBN$ چند برابر $R^۲$ است؟

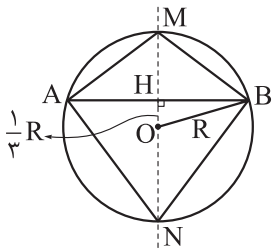
۱) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$

۲) $\frac{۸\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$

۴) $\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (محاسبهٔ طول AB)**: در مثلث OHB طبق فیثاغورس داریم:



$$BH^۲ = R^۲ - (\frac{۱}{۳}R)^۲ = \frac{۸}{۹}R^۲ \Rightarrow BH = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}R \Rightarrow AB = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}R$$

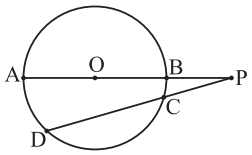
گام دوم (محاسبهٔ مساحت AMBN): قطرهای چهارضلعی $AMBN$ بر هم عمودند، پس مساحت برابر با نصف حاصل‌ضرب قطرهاست؛ بنابراین داریم:

$$S_{AMBN} = \frac{۱}{۲}AB.MN = \frac{۱}{۲}(\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}R)(۲R) = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}R^۲$$

یادآوری: از سال دهم می‌دانیم مساحت چهارضلعی محدبی که قطرهای آن بر هم عمودند، برابر است با نصف حاصل‌ضرب قطرهای آن.

AzmoonFree.ir

۳۸ مطابق شکل، نقطهٔ **O** مرکز دایره و طول **PC** برابر با شعاع دایره است. اگر اندازهٔ کمان **BC** برابر ۱۵° باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از **PD** چند برابر شعاع است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}$

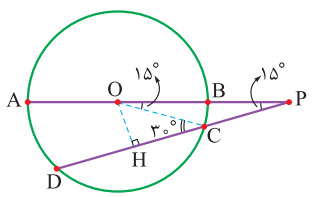
Hint

اندازهٔ کمان BC را داری، پس از O به C وصل کن تا با استفاده از زاویهٔ مرکزی روبه‌روی کمان BC و زاویهٔ P، زاویهٔ OCD را به دست بیاوری.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم OC و OH): از نقطهٔ O به PD عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. مطلوب مسئله اندازهٔ OH است. هم‌چنین از نقطهٔ O به C وصل می‌کنیم.

گام دوم (محاسبهٔ $\widehat{OCH}$): زاویهٔ BOC زاویه‌ای مرکزی است، پس این زاویه برابر با کمان مقابلش، یعنی ۱۵ درجه است و چون بنا به فرض، OC و PC برابرند و مثلث OPC متساوی‌الساقین است (طول ساق‌ها برابر با شعاع دایره)، در نتیجه زاویهٔ P نیز برابر ۱۵ درجه است و بنابر زاویهٔ خارجی در مثلث OCP داریم $O\hat{C}D = P\hat{O}C + O\hat{P}C = ۳۰^\circ$.



گام سوم (محاسبهٔ طول OH برحسب R):

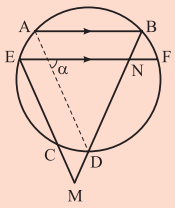
اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{OH}{OC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{OH}{R} \Rightarrow OH = \frac{R}{۲}$$

یعنی فاصلهٔ O از PD نصف شعاع دایره است.

AzmoonFree.ir

۳۹ مطابق شکل $AB \parallel EF$ و $ME = EN = NM$، اگر $\overset{\frown}{2FD} = \overset{\frown}{3EC} = 210^\circ$ آن‌گاه زاویهٔ α چند درجه است؟



۱) ۷۰

۲) ۶۵

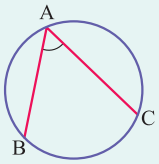
۳) ۷۲/۵

۴) ۶۷/۵

مشاوره این سؤال ترکیبی از محاسبهٔ انواع زاویه‌ها در دایره است که مشابه آن را در کنکور دیده‌ایم.

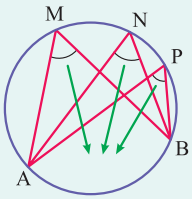
درس Box

زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن واقع بر دایره و ضلع‌های آن وترهایی از دایره باشند. ثابت می‌شود که اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی، نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است:



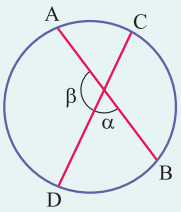
$$\hat{A} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

نکته همهٔ زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان با هم برابرند.



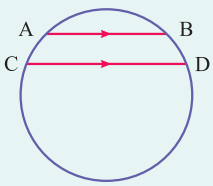
$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \ldots = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

زاویهٔ وتری داخلی: اندازهٔ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع در داخل دایره، میانگین اندازهٔ کمان‌های روبه‌روی آن است.



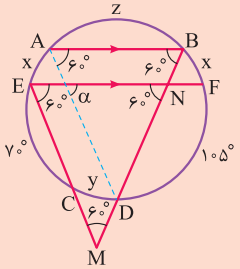
$$\alpha = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}) \quad \text{و} \quad \beta = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC})$$

نکته با استفاده از خاصیت زاویهٔ محاطی می‌توان ثابت کرد کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در یک دایره، با هم مساوی‌اند.



$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال)**: طبق فرض صورت سؤال $\overset{\frown}{2FD} = \overset{\frown}{3EC} = 210^\circ$ بنابراین $\overset{\frown}{FD} = 105$ و $\overset{\frown}{EC} = 70^\circ$ و از آن‌جایی که AE و BF کمان‌های محصور بین وترهای موازی هستند پس هر دوی آن‌ها با هم برابرند و آن‌ها را x در نظر می‌گیریم. کمان CD را y و کمان AB را نیز z در نظر می‌گیریم.



AzmoonFree.ir

گام دوم (محاسبهٔ اندازهٔ کمان‌ها x و y): مثلث ENM متساوی‌الاضلاع است، پس $\hat{E} = \hat{N} = \hat{M} = ۶۰^\circ$؛ و چون $AB \parallel EF$ و BN مورب است، پس $\hat{N} = \hat{B} = ۶۰^\circ$. زاویه‌های E و B محاطی هستند پس اندازهٔ آن‌ها برابر است با نصف کمان روبه‌روی آن‌ها.

$$\hat{E} \to ۶۰^\circ = \frac{y + ۱۰۵^\circ}{۲} \Rightarrow y = ۱۵^\circ$$

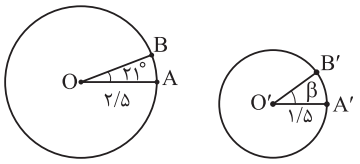
$$\hat{B} \to ۶۰^\circ = \frac{(۷۰^\circ + ۱۵^\circ) + x}{۲} \Rightarrow x = ۳۵^\circ$$

گام سوم (محاسبهٔ α): α زاویهٔ بین دو وتر متقاطع AD و EF در دایره است؛ بنابراین داریم:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{DF}}{۲} = \frac{۱۰۵^\circ + ۳۵^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

AzmoonFree.ir

۴۰ مطابق شکل، در دو دایرهٔ $C(O,۲/۵)$ و $C'(O',۱/۵)$ طول کمان‌های AB و $A'B'$ برابرند. اگر $A\hat{O}B = ۲۱^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ β چند درجه است؟



۱) $۳۲/۵$

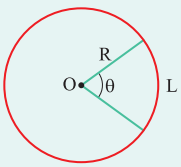
۲) ۳۲

۳) $۳۷/۵$

۴) ۳۵

Hint از فرمول محاسبهٔ طول کمان‌ها استفاده کن و زاویهٔ β را به دست بیاور.

درس Box طول کمانی از دایره به شعاع R که زاویهٔ مرکزی نظیر آن θ درجه باشد، برابر است با $L = \frac{\theta}{۱۸۰^\circ}\pi R$.



پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (محاسبهٔ طول کمان‌ها):** طبق درس‌باکس داریم:

$$L_{AB} = \frac{۲۱^\circ}{۱۸۰^\circ} \times ۲/۵\pi$$

$$L_{A'B'} = \frac{\beta}{۱۸۰^\circ} \times ۱/۵\pi$$

گام دوم (محاسبهٔ β):

طول دو کمان با هم برابر است، پس داریم:

$$L_{AB} = L_{A'B'} \Rightarrow \frac{۲۱^\circ}{۱۸۰^\circ} \times ۲/۵\pi = \frac{\beta}{۱۸۰^\circ} \times ۱/۵\pi \Rightarrow \beta = ۳۵^\circ$$

AzmoonFree.ir

فیزیک دوازدهم

۴۱ سرعت متوسط متحرکی که با شتاب ثابت $۱/۲\ m/s^۲$ در مسیری مستقیم حرکت می‌کند، در دو ثانیهٔ سوم، برابر صفر است. سرعت متوسط این متحرک در ۵ ثانیهٔ سوم چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۱۸ ۴) ۹

Hint

با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت، ابتدا سرعت اولیهٔ متحرک $(v_۰)$ را به دست آورید. سپس سرعت متحرک در لحظه‌های $t_۱ = ۵s$ و $t_۲ = ۱۵s$ را محاسبه کرده و به کمک رابطهٔ $v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}$ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ را پیدا کنید.

درس Box

۱) اگر متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت کند و در یک بازهٔ زمانی معین، جابه‌جایی آن صفر باشد (به محل اولیهٔ خود برگردد)، دقیقاً در وسط این بازهٔ زمانی، سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت می‌دهد.

۲) اگر متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت کند و سرعت آن از $v_۱$ به $v_۲$ برسد، سرعت متوسط آن علاوه بر رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ از رابطهٔ زیر نیز به دست می‌آید:

$$v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سرعت متحرک در دو ثانیهٔ سوم حرکت $(۴s < t < ۶s)$ صفر است؛ بنابراین در لحظهٔ $t_s = ۵s$ سرعت متحرک صفر است.

$$t_s = \frac{t_۱ + t_۲}{۲} = \frac{۴ + ۶}{۲} = ۵s$$

با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان، سرعت اولیه $(v_۰)$ را حساب می‌کنیم:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[a=۱/۲\ m/s^۲,\ t=t_s=۵\ s]{v=v_s=۰} ۰ = ۱/۲ \times ۵ + v_۰ \Rightarrow v_۰ = -۶\ m/s$$

گام دوم: ۵ ثانیهٔ سوم حرکت یعنی از لحظهٔ $t_۱ = ۱۰\ s$ تا $t_۲ = ۱۵\ s$. سرعت متحرک در هر یک از این دو لحظه را پیدا می‌کنیم:

$$v_۱ = at_۱ + v_۰ \xrightarrow[v_۰=-۶\ m/s]{a=۱/۲\ m/s^۲,\ t_۱=۱۰s} v_۱ = ۱/۲ \times ۱۰ - ۶ = ۶\ m/s$$

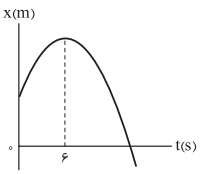
$$v_۲ = at_۲ + v_۰ \xrightarrow[v_۰=-۶\ m/s]{a=۱/۲\ m/s^۲,\ t_۲=۱۵s} v_۲ = ۱/۲ \times ۱۵ - ۶ = ۱۲\ m/s$$

گام سوم: اکنون می‌توانیم سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۱۰ s تا ۱۵ s را به دست آوریم:

$$v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} = \frac{۶ + ۱۲}{۲} = ۹\ m/s$$

AzmoonFree.ir

۴۲ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت، در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ دوم چند برابر تندی متوسط آن در ۴ ثانیهٔ دوم است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۱۵}{۸}$

۳) $\frac{۱۷}{۸}$

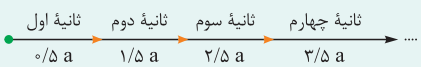
۴) $\frac{۱۷}{۱۰}$

مشاوره در حل بعضی از سؤال‌های حرکت‌شناسی مانند این تست، شاید در ابتدا به نظر برسد که اطلاعات سؤال برای حل آن کافی نیست. اما با کمی دقت و تجربه می‌توان تکنیک‌های ریاضی و فیزیک را با هم ترکیب کرد و با حذف برخی کمیت‌ها به جواب رسید.

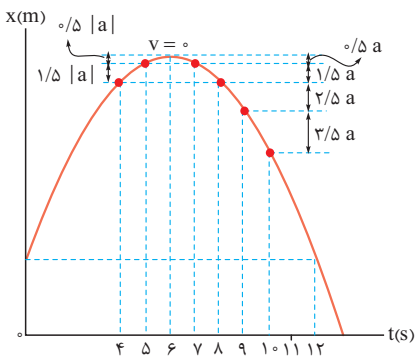
درس Box

وقتی متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت a روی خط راست به حرکت در آید، جابه‌جایی‌های آن در ثانیه‌های متوالی، یک دنبالهٔ عددی تشکیل می‌دهند که قدرنسبت آن، شتاب متحرک است. جابه‌جایی در ثانیهٔ اول این حرکت همان جملهٔ اول دنباله است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \xrightarrow[t=۱\,s]{v_۰=۰} \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}a(۱)^۲ = ۰/۵a$$



پاسخ خیلی تشریحی



گام اول: شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان داده‌شده در لحظهٔ $t = ۶s$ صفر است. یعنی سرعت متحرک در این لحظه صفر است. این لحظهٔ خاص مربوط به رأس سهمی است و در طرفین آن تقارن وجود دارد.

گام دوم: ۵ ثانیهٔ دوم یعنی از $t_۱ = ۵s$ تا $t_۲ = ۱۰\,s$ و چهار ثانیهٔ دوم یعنی از $t'_۱ = ۴s$ تا $t'_۲ = ۸s$. اکنون می‌توانیم نسبت اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ دوم $(|v_{av}|)$ به تندی متوسط آن در چهار ثانیهٔ دوم (s_{av}) را به دست آوریم (توجه داشته باشید که در این‌جا $a < ۰$ است):

$$\frac{|v_{av}|}{s_{av}} = \frac{\frac{|\Delta x|}{t_۲ - t_۱}}{\frac{\ell}{t'_۲ - t'_۱}} = \frac{|۰/۵|a| + ۰/۵a + ۱/۵a + ۲/۵a + ۳/۵a|}{۱۰-۵} = \frac{|۷/۵a|}{۵} = \frac{|۷/۵a|}{۴|a|}$$

$$\Rightarrow \frac{|v_{av}|}{s_{av}} = \frac{\frac{۷/۵|a|}{۵}}{|a|} = \frac{۷/۵}{۵} = \frac{۳}{۲}$$

AzmoonFree.ir

۴۳ متحرکی با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند. اگر در ۸ s اول، سرعت متوسط متحرک برابر $8\vec{i}\ (m/s)$ و تندی متوسط آن برابر ۱۰ m / s باشد، مسافت طی‌شده توسط متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم، چند متر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

درس Box

۱) در حرکت با شتاب ثابت روی محور x، رابطهٔ مستقل از سرعت اولیه به صورت زیر است:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

Δx : جابه‌جایی (m)

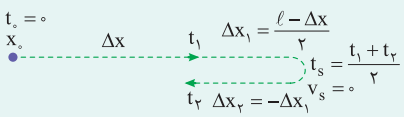
a : شتاب (m/s^2)

t : زمان (s)

v : سرعت متحرک در لحظهٔ t (m / s)

۲) در حرکت با شتاب ثابت روی محور x، وقتی در یک بازهٔ زمانی معین، اندازهٔ سرعت متوسط با تندی متوسط برابر نباشد، یعنی اندازهٔ جابه‌جایی با مسافت برابر نیست؛ بنابراین سرعت متحرک در یک لحظه مانند t_s برابر صفر شده و در این لحظه جهت حرکت تغییر کرده است.

اگر از لحظهٔ شروع حرکت $(t_0 = 0)$ تا لحظهٔ t_2 جابه‌جایی متحرک را با Δx و مسافت طی‌شده را با ℓ نمایش دهیم، داریم:



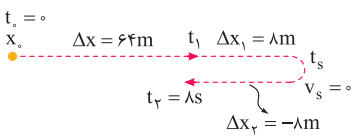
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جابه‌جایی و مسافت طی‌شده در ۸ ثانیهٔ اول حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 8 = \frac{\Delta x}{8-0} \Rightarrow \Delta x = 64\ m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 10 = \frac{\ell}{8-0} \Rightarrow \ell = 80\ m$$

اندازهٔ جابه‌جایی با مسافت برابر نیست و مسیر حرکت به صورت زیر است:



گام دوم: رابطهٔ مستقل از سرعت اولیه را در بازهٔ زمانی $t_0 = 0$ تا t_s می‌نویسیم:

$$\Delta x + \Delta x_1 = -\frac{1}{2}a(t_s - t_0)^2 + v_s(t_s - t_0) \xrightarrow[t_0=0\ ,\ v_s=0]{\Delta x=64m\ ,\ \Delta x_1=8m} 64 + 8 = -\frac{1}{2}at_s^2 \Rightarrow -144 = at_s^2$$

گام سوم: معادلهٔ جابه‌جایی برحسب زمان را در بازهٔ زمانی t_s تا t_2 می‌نویسیم:

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}a(t_2 - t_s)^2 + v_s(t_2 - t_s) \xrightarrow[t_2=8s\ ,\ v_s=0]{\Delta x_2=-8m} -8 = \frac{1}{2}a(8 - t_s)^2 \Rightarrow -16 = a(8 - t_s)^2$$

گام چهارم: روابط به‌دست‌آمده در گام‌های دوم و سوم را بر هم تقسیم می‌کنیم تا مقدار t_s و از آن‌جا t_1 را به دست آوریم:

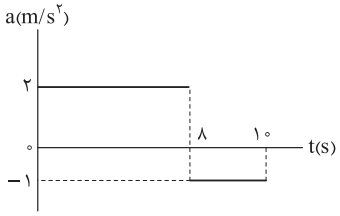
$$\frac{-144}{-16} = \frac{at_s^2}{a(8-t_s)^2} \Rightarrow 9 = \frac{t_s^2}{(8-t_s)^2} \Rightarrow 3 = \frac{t_s}{8-t_s} \Rightarrow 24 - 3t_s = t_s \Rightarrow 24 = 4t_s \Rightarrow t_s = 6s$$

$$t_s = \frac{t_1 + t_2}{2} \Rightarrow 6 = \frac{t_1 + 8}{2} \Rightarrow t_1 = 4s$$

دو ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی $t_1 = 4s$ تا $t_s = 6s$؛ در این بازهٔ زمانی مسافت طی‌شده با Δx_1 برابر بوده و 8m است.

AzmoonFree.ir

۴۴ نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر سرعت متوسط متحرک در ۱۰ s اول برابر $\vec{i}(۱۳/۴\ m/s)$ باشد، تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۵s$ چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۴

۲) ۸

۳) ۱۰

۴) ۱۴

درس Box در نمودار شتاب ـ زمان، مساحت سطح بین نمودار و محور زمان در هر بازهٔ زمانی، برابر با تغییر سرعت (Δv) در آن بازه است.

پاسخ خیلی تشریحی

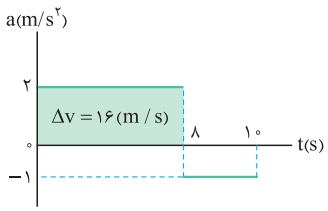
گام اول: جابه‌جایی (Δx) در ۱۰ ثانیهٔ اول را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۱۳/۴ = \frac{\Delta x}{۱۰} \Rightarrow \Delta x = ۱۳۴m$$

بخشی از این جابه‌جایی مربوط به ۸ ثانیهٔ اول $(\Delta x_۱)$ و بقیهٔ آن مربوط به بازهٔ زمانی ۸s تا ۱۰ s $(\Delta x_۲)$ است.

$$\Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲$$

گام دوم: $\Delta x_۱$ و $\Delta x_۲$ را به کمک معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان حساب می‌کنیم. باید توجه داشت که سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۸s$ برابر است با سرعت اولیهٔ $v_۰$ به اضافهٔ ۱۶ m/s که از مساحت سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان به دست می‌آید.



$$\Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}a_۱t_۱^۲ + v_۰t_۱ \xrightarrow{a_۱=۲\ m/s^۲\ ,\ t_۱=۸\ s} \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}\times۲\times۸^۲ + v_۰\times۸ \Rightarrow \Delta x_۱ = ۶۴ + ۸v_۰$$

$$\Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}a_۲t_۲^۲ + (v_۰+۱۶)t_۲ \xrightarrow[t_۲=۱۰-۸=۲s]{a_۲=-۱m/s^۲} \Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}(-۱)۲^۲ + (v_۰+۱۶)\times۲ \Rightarrow \Delta x_۲ = -۲+۲v_۰+۳۲ = ۲v_۰+۳۰$$

$$\Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ \Rightarrow ۱۳۴ = ۶۴ + ۸v_۰ + ۲v_۰ + ۳۰ \Rightarrow ۴۰ = ۱۰v_۰ \Rightarrow v_۰ = ۴\ m/s$$

گام سوم: در ۸ ثانیهٔ اول این حرکت، سرعت همواره بزرگ‌تر از صفر است و تغییر جهت نداریم؛ بنابراین در لحظهٔ $t = ۵s$ تندی و سرعت متحرک برابر هستند.

$$v = at + v_۰ \xrightarrow{t=۵\ s\ ,\ a=۲\ m/s^۲} v = ۲\times۵ + ۴ = ۱۴\ m/s$$

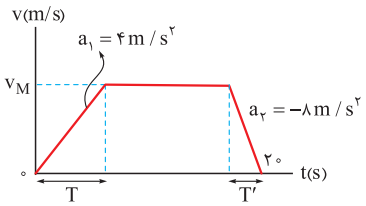
AzmoonFree.ir

۴۵ خودرویی در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت $۴\ m/s^۲$ به حرکت درمی‌آید و پس از مدتی با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. در نهایت با شتاب ثابتی به بزرگی $۸\ m/s^۲$، حرکتش کند شده و می‌ایستد. اگر کل زمان حرکت خودرو $۲۰\ s$ و مسافت طی‌شده توسط آن در این مدت برابر $۳۲۵\ m$ باشد، بیشینهٔ تندی خودرو در حین این حرکت، چند کیلومتر بر ساعت است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۷۲ ۴) ۹۰

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از اطلاعات داده‌شده در متن تست، نمودار سرعت ـ زمان آن را در مدت $۲۰\ s$ رسم می‌کنیم و بیشینهٔ تندی خودرو را با v_M نشان می‌دهیم.



گام دوم: بازهٔ زمانی حرکت تندشونده را با T و بازهٔ زمانی حرکت کندشونده را با T' نشان می‌دهیم. اکنون رابطهٔ بین T و T' را به دست می‌آوریم:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = \frac{v_M - ۰}{T} \Rightarrow ۴ = \frac{v_M}{T} \\ a_۲ = \frac{۰ - v_M}{T'} \Rightarrow -۸ = \frac{-v_M}{T'} \Rightarrow ۸ = \frac{v_M}{T'} \end{cases}$$

$$\frac{\frac{v_M}{T}}{\frac{v_M}{T'}} = \frac{۴}{۸} \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow T' = \frac{T}{۲}$$

گام سوم: از آن‌جا که در این ۲۰ ثانیه علامت سرعت تغییر نمی‌کند، یعنی تغییر جهت حرکت نداریم و مسافت با جابه‌جایی برابر است:

$$\Delta x = \ell = ۳۲۵\ m$$

می‌دانیم مساحت سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان در هر بازهٔ زمانی با جابه‌جایی در آن بازهٔ زمانی برابر است:

$$S_{\text{ذوزنقه}} = ۳۲۵m \Rightarrow ۳۲۵ = \frac{[۲۰ + ۲۰ - (T + T')] \times v_M}{۲} \xrightarrow[v_M = ۴T]{T' = \frac{T}{۲}} ۳۲۵ = \frac{[۴۰ - (T + \frac{T}{۲})] \times ۴T}{۲} \Rightarrow ۳۲۵ = (۴۰ - \frac{۳}{۲}T)۲T$$

$$\Rightarrow ۳۲۵ = ۸۰T - ۳T^۲ \Rightarrow ۳T^۲ - ۸۰T + ۳۲۵ = ۰ \Rightarrow T = \frac{۴۰ \pm \sqrt{۱۶۰۰ - ۹۷۵}}{۳} = \frac{۴۰ \pm ۲۵}{۳} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{۶۵}{۳}\ s \\ T = ۵s \end{cases}$$

$$v_M = ۴T \Rightarrow \begin{cases} v_M = ۴ \times \frac{۶۵}{۳} = \frac{۲۶۰}{۳}\ m/s \Rightarrow v_M = \frac{۲۶۰}{۳} \times ۳/۶ = ۳۱۲\ km/h \\ v_M = ۴ \times ۵ = ۲۰\ m/s \Rightarrow v_M = ۲۰ \times ۳/۶ = ۷۲\ km/h \end{cases}$$

از بین دو جواب به‌دست‌آمده برای v_M، تندی $۷۲\ km/h$ در گزینه‌ها وجود دارد.

AzmoonFree.ir

۴۶ در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع ۲۸/۸ متری سطح زمین رها می‌شود. این گلوله ۰/۴ s قبل از رسیدن به سطح زمین، در ارتفاع چندمتری از سطح زمین قرار دارد؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۲/۲ ۲) ۴/۴

۳) ۸/۸ ۴) ۱۷/۶

Hint ابتدا به کمک معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی، سرعت گلوله هنگام رسیدن به سطح زمین را محاسبه کنید، سپس به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان، سرعت گلوله ۰/۴s قبل از رسیدن به سطح زمین را بیابید. در پایان به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، خواستهٔ تست قابل محاسبه است.

درس Box اگر جسم فقط تحت تأثیر نیروی وزن خود سقوط کند، به این حرکت سقوط آزاد می‌گویند. سقوط آزاد نمونه‌ای از حرکت با شتاب ثابت $(a = -g)$ است.

معادلات حرکت سقوط آزاد (جهت مثبت به طرف بالا در نظر گرفته شده است):

$$v = -gt + v_0$$
$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$
$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y$$
$$\Delta y = \frac{v + v_1}{2}\Delta t$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به کمک معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی، سرعت گلوله هنگام رسیدن به سطح زمین را محاسبه می‌کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \Rightarrow v^2 - 0 = -2\times 10\times(-28/8) \Rightarrow v^2 = 576 \Rightarrow v = -24\ m/s$$

گام دوم: به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان، سرعت گلوله ۰/۴ s قبل از رسیدن به سطح زمین را به دست می‌آوریم:

$$v = -gt + v_1 \Rightarrow -24 = -10\times 0/4 + v_1 \Rightarrow v_1 = -24 + 4 = -20\ m/s$$

گام سوم: جابه‌جایی گلوله در ۰/۴ s آخر برابر است با:

$$\Delta y = \frac{v + v_1}{2}\Delta t = \frac{-24 + (-20)}{2}\times 0/4 = -8/8\ m$$

بنابراین گلوله ۰/۴ s قبل از رسیدن به سطح زمین در ارتفاع ۸/۸ متری از سطح زمین قرار دارد.

نکته در حرکت با شتاب ثابت، اگر سرعت در انتهای یک بازهٔ زمانی معین را داشته باشیم، برای راحتی می‌توانیم حرکت متحرک را برعکس کنیم و بررسی‌هایمان را انجام دهیم. فقط کافی است که در معادلات حرکت با شتاب ثابت به جای a، $-a$ و به جای سرعت اولیه، سرعت نهایی را قرار دهیم؛ برای نمونه:

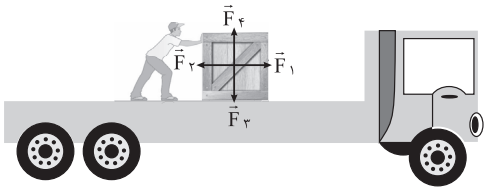
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow{\text{برعکس‌کردن حرکت}} \Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + v_{\text{نهایی}}t$$

تیزبازی پس از محاسبهٔ سرعت رسیدن گلوله به سطح زمین $(v = -24\ m/s)$، حرکت در ۰/۴ ثانیهٔ آخر را برعکس می‌کنیم تا جابه‌جایی در این ۰/۴ s به دست آید:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 + v_{\text{نهایی}}t = \frac{1}{2}\times 10\times(0/4)^2 - 24\times 0/4 = 0/8 - 9/6 = -8/8\ m \Rightarrow |\Delta y| = 8/8\ m$$

AzmoonFree.ir

۴۷ شخصی یک جعبه را روی سطح افقی پشت کامیون ساکنی به حرکت درآورده است. در شکل زیر علاوه بر نیرویی که شخص به جعبه وارد می‌کند، سه نیروی وزن، عمودی سطح و اصطکاک هم نشان داده شده است. چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ این نیروها، الزاماً درست است؟ (مقاومت هوا ناچیز است.)



الف) نیروهای $\vec{F}_4$ و $\vec{F}_3$، کنش و واکنش‌اند.

ب) واکنش دو نیروی $\vec{F}_4$ و $\vec{F}_2$، به یک جسم وارد می‌شوند.

پ) اندازهٔ نیروی $\vec{F}_1$ بزرگ‌تر از اندازهٔ نیروی $\vec{F}_2$ است.

ت) نیروهای وارد بر جعبه متوازن هستند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) $\vec{F}_4$ نیروی عمودی سطح است که از طرف سطح افقی پشت کامیون به جسم وارد می‌شود. $\vec{F}_3$ هم نیروی وزن جسم است که از طرف کرهٔ زمین به جسم وارد می‌شود. با این توضیحات، واضح است که نیروهای $\vec{F}_3$ و $\vec{F}_4$ کنش و واکنش نیستند. ✗

ب) در بررسی عبارت «الف»، با $\vec{F}_4$ آشنا شدیم. $\vec{F}_2$ هم نیروی اصطکاک است که از طرف سطح افقی پشت کامیون به جسم وارد می‌شود، یعنی هر دوی این نیروها از طرف سطح افقی پشت کامیون به جسم وارد می‌شوند؛ بنابراین واکنش هر دوی این نیروها به سطح افقی پشت کامیون وارد می‌شود. ✓

پ) اگر حرکت جعبه شتابدار باشد، اندازهٔ $\vec{F}_1$ بزرگ‌تر از اندازهٔ $\vec{F}_2$ است، ولی اگر جسم با سرعت ثابت حرکت کند، اندازهٔ این دو نیرو برابر است؛ پس الزاماً این عبارت درست نیست. ✗

ت) اگر حرکت جسم با سرعت ثابت انجام شود، نیروهای وارد بر جسم متوازن‌اند، ولی اگر حرکت جسم شتابدار باشد، این نیروها متوازن نیستند؛ پس این عبارت هم الزاماً درست نیست. ✗

AzmoonFree.ir

۴۸ دو جسم **A** و **B** به جرم‌های $m_A = ۵\,kg$ و $m_B = ۴\,kg$ روی محور **x** قرار دارند. اگر در لحظه‌ای جسم **A** به جسم **B** نیروی $۲۰\,N)\vec{i}$ وارد کند، در این لحظه شتاب جسم **A** برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (به دو جسم در راستای حرکت، نیروی دیگری وارد نمی‌شود.)

۱) $۴\vec{i}$ ۲) $۵\vec{i}$

۳) $-۴\vec{i}$ ۴) $-۵\vec{i}$

Hint ابتدا به کمک قانون سوم نیوتون، نیرویی که جسم B به جسم A وارد می‌کند را بیابید، سپس به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب جسم A را محاسبه کنید.

درس Box

۱) قانون دوم نیوتون:

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a}$$

۲) قانون سوم نیوتون: هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم نیز به جسم اول نیرو وارد می‌کند؛ به طوری که:

- یکی از این نیروها **کنش** و دیگری **واکنش** نامیده می‌شود.
- این نیروها هم‌اندازه و هم‌راستا، ولی در خلاف جهت یکدیگرند:

$$\vec{F}_{۱۲} = -\vec{F}_{۲۱} \Rightarrow F_{۱۲} = F_{۲۱}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که جسم B به جسم A وارد می‌کند، برابر است با:

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} = -(۲۰\,N)\vec{i}$$

گام دوم: طبق قانون دوم نیوتون، شتاب جسم A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F}_{BA} = m_A\vec{a}_A \Rightarrow -(۲۰\,N)\vec{i} = ۵\times\vec{a}_A \Rightarrow \vec{a}_A = -(۴\,m/s^۲)\vec{i}$$

AzmoonFree.ir

۴۹ **چتربازی از یک بالگرد ساکن در ارتفاع زیاد، رها شده و مدتی پس از آن‌که سرعتش ثابت شد، چترش را باز می‌کند. در بازهٔ زمانی از لحظهٔ بازشدن چتر تا لحظه‌ای که سرعت چترباز دوباره به مقدار ثابتی برسد، کدام مورد دربارهٔ حرکت چترباز درست است؟**

۱) جهت شتاب چترباز به سمت پایین است.

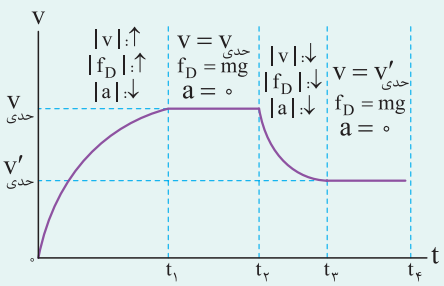
۲) ابتدا چترباز مقداری به سمت بالا جابه‌جا می‌شود.

۳) اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز افزایش می‌یابد.

۴) اندازهٔ نیروی خالص وارد بر چترباز کاهش می‌یابد.

درس Box

اگر چتربازی در مبدأ زمان از یک بلندی رها شود، تندی متحرک شروع به افزایش می‌کند؛ در نتیجه اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر آن هم افزایش می‌یابد؛ بنابراین چون نیروی مخالف حرکت چترباز بزرگ‌تر شده، اندازهٔ شتاب آن کاهش می‌یابد. با افزایش اندازهٔ نیروی مقاومت هوا، فرض می‌کنیم در لحظهٔ t_1، اندازهٔ این نیرو، با نیروی وزن برابر شده و چترباز به تندی حدی خود در حالتی که چتر، بسته است ($v_{حدی}$) می‌رسد. از لحظهٔ t_1 به بعد، تندی ثابت می‌ماند. اگر در لحظهٔ t_2، چتر، باز شود، اندازهٔ نیروی مقاومت هوا به طور ناگهانی افزایش می‌یابد. از این لحظه به بعد، چون اندازهٔ نیروی مقاومت هوا بزرگ‌تر از وزن است، تندی چترباز کاهش می‌یابد. با کاهش تندی چترباز، اندازهٔ نیروی مقاومت هوا هم کوچک‌تر می‌شود. این روند تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که اندازهٔ نیروی مقاومت هوا با نیروی وزن برابر شده و از این لحظه به بعد که اسم آن را t_3 می‌گذاریم، جسم به تندی حدی خود در حالتی که چتر، باز است ($v'_{حدی}$) می‌رسد. اگر فرض کنیم در لحظهٔ t_4 چترباز به زمین برسد، نمودار تندی ـ زمان چترباز در این حرکت به شکل روبه‌رو خواهد بود. در این نمودار، دانستن تحلیل تغییرات ۳ کمیت زیر ضروری است:



الف) **تندی**: که واضح است!

ب) **اندازهٔ نیروی مقاومت هوا**: درست مثل تندی!

پ) **اندازهٔ شتاب (و نیروی خالص وارد بر) جسم**: برای تعیین کاهش و افزایش این کمیت به شیب نمودار توجه می‌کنیم.

چگونگی تغییر این کمیت‌ها را در هر مرحله، روی نمودار مشخص کرده‌ایم.

پاسخ خیلی تشریحی

قبل از بازشدن چتر، چون تندی چترباز ثابت است، نیروی مقاومت هوای وارد بر او با نیروی وزنش هم‌اندازه است. هنگامی که چتر، باز می‌شود، به علت افزایش بزرگی (ابعاد) چتر، نیروی مقاومت هوا ناگهان افزایش می‌یابد. در این حالت چون اندازهٔ نیروی مقاومت هوا بیشتر از اندازهٔ نیروی وزن است، در حالی که چترباز به سمت پایین در حرکت است (نادرستی گزینهٔ (۲))، نیروی خالص و در نتیجه شتاب به سمت بالا است (نادرستی گزینهٔ (۱)). چون شتاب و سرعت در خلاف جهت یکدیگرند، با گذشت زمان، تندی چترباز و در نتیجه اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر او کاهش می‌یابد (نادرستی گزینهٔ (۳)). با کاهش اندازهٔ نیروی مقاومت هوا، اندازهٔ نیروی خالص وارد بر چترباز نیز کاهش می‌یابد (درستی گزینهٔ (۴)). این کاهش تا زمانی ادامه می‌یابد که اندازهٔ این نیروی خالص، صفر شده و تندی چترباز دوباره ثابت شود.

تیزبازی

در انتهای بازهٔ زمانی مورد بررسی، سرعت چترباز دوباره به مقدار ثابتی می‌رسد، یعنی اندازهٔ شتاب و نیروی خالص وارد بر چترباز به صفر می‌رسد؛ بنابراین واضح است که در این بازهٔ زمانی، اندازهٔ نیروی خالص وارد بر چترباز کاهش می‌یابد و گزینهٔ (۴) حتماً درست است و نیازی نیست سه گزینهٔ دیگر را بررسی کنیم.

AzmoonFree.ir

۵۰ دو گوی هم‌اندازهٔ **A** و **B** به جرم‌های m_A و m_B که $m_B > m_A$ است، از یک بلندی به طور هم‌زمان رها می‌شوند. اگر اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر دو گوی، در طی حرکت، ثابت و یکسان باشد، به ترتیب از راست به چپ، کدام گوی زودتر به سطح زمین می‌رسد و کدام گوی با تندی بیشتری به سطح زمین برخورد می‌کند؟

۱) A ،A
۲) B ،B
۳) B ،A
۴) A ،B

Hint

ابتدا به کمک قانون دوم نیوتون به مقایسهٔ شتاب دو گوی بپردازید، سپس به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت، مدت‌زمان سقوط دو گوی را مقایسه کنید. در پایان برای مقایسهٔ تندی برخورد گوی‌ها به زمین، از رابطهٔ سرعت ـ جابه‌جایی استفاده کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به هر یک از گوی‌ها، نیروی رو به بالای مقاومت هوا و نیروی رو به پایین وزن وارد می‌شود.

به مقایسهٔ شتاب دو گوی می‌پردازیم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - f_d = ma \Rightarrow a = g - \frac{f_d}{m} \xrightarrow[m_B > m_A]{f_d \text{ یکسان}} a_B > a_A$$

گام دوم: برای مقایسهٔ زمان رسیدن به سطح زمین برای دو گوی، از رابطهٔ $|\Delta y| = \frac{1}{2}at^2$ کمک می‌گیریم:

$$|\Delta y| = \frac{1}{2}at^2 \xrightarrow[a_B > a_A]{|\Delta y| \text{ یکسان}} t_B < t_A$$

یعنی گوی B زودتر از گوی A به سطح زمین می‌رسد.

گام سوم: برای مقایسهٔ تندی برخورد به سطح زمین از رابطهٔ $v^2 = 2a|\Delta y|$ کمک می‌گیریم:

$$v^2 = 2a|\Delta y| \xrightarrow[a_B > a_A]{|\Delta y| \text{ یکسان}} v_B > v_A$$

تندی برخورد گوی B به سطح زمین بیشتر از گوی A است.

AzmoonFree.ir

۵۱ جسمی از ارتفاع بلندی رها شده و پس از مدتی با تندی ثابت v به حرکت خود ادامه می‌دهد تا به سطح زمین برسد. این جسم را با تندی بیشتر از v، از سطح زمین به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اندازهٔ شتاب جسم در لحظه‌ای که تندی آن برابر با v می‌شود، کدام است؟ (g، شتاب گرانش در سطح زمین است.)

۱) $2g$ ۲) g ۳) $\frac{g}{2}$ ۴) صفر

درس Box

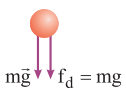
درس box شمارهٔ ۱ تست ۴۸ و درس box تست ۴۹ را بخوانید.

پاسخ خیلی تشریحی

در حالت اول، v تندی حدی جسم است و این تندی مربوط به حالتی است که نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم هم‌اندازه با وزن جسم شود. با توجه به این‌که اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم به تندی آن بستگی دارد، می‌توان نتیجه گرفت که وقتی تندی جسم برابر با v شود، اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم برابر وزن جسم می‌شود.

در حالت دوم، به جسم نیروی رو به پایین وزن وارد می‌شود. از طرفی جسم رو به بالا در حرکت است، پس نیروی مقاومت هوای وارد بر آن به طرف پایین بوده و در لحظه‌ای که تندی جسم برابر v می‌شود، اندازهٔ این نیرو با اندازهٔ نیروی وزن برابر می‌شود (شکل زیر).

اندازهٔ شتاب جسم به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$F_{net} = ma \Rightarrow mg + f_d = ma \xrightarrow{f_d = mg} 2mg = ma \Rightarrow a = 2g$$

AzmoonFree.ir

۵۲ شخصی به جرم $60\ kg$ درون آسانسور ساکنی روی ترازوی فنری ایستاده است. به ترتیب، در حالت‌های «الف» و «ب»، مقداری که ترازو نشان می‌دهد، چند نیوتون است؟ $(g = 10\ N/kg)$

الف) آسانسور با شتاب رو به پایین $3\ m/s^2$ حرکت کند.

ب) کابل آسانسور پاره شود و آسانسور سقوط آزاد کند.

۱) ۴۲۰، ۶۰۰

۲) ۷۸۰، ۶۰۰

۳) ۴۲۰، صفر

۴) ۷۸۰، صفر

درس Box

در تست‌های آسانسوری که به جسم، علاوه بر وزن، یک نیروی رو به بالا $(\vec{F})$ وارد می‌شود (این نیرو می‌تواند نیروی عمودی سطح، نیروی کشسانی فنر یا نیروی کشش نخ باشد)، می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$F = m(g \pm a)$$

- $+a$: اگر شتاب رو به بالا باشد. (حرکت رو به بالا تندشونده / حرکت رو به پایین کندشونده)
- $-a$: اگر شتاب رو به پایین باشد. (حرکت رو به بالا کندشونده / حرکت رو به پایین تندشونده)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عددی که ترازو نشان می‌دهد، همان نیروی عمودی سطح وارد بر شخص است. در حالت «الف» شتاب رو به پایین است؛ بنابراین:

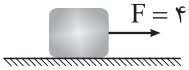
$$F_N = m(g-a) = 60(10-3) = 420\ N$$

گام دوم: در حالت «ب» آسانسور سقوط آزاد می‌کند، یعنی شتاب سقوط برابر با g است؛ پس:

$$F_N = m(g-a) \xrightarrow{a=g} F_N = 0$$

AzmoonFree.ir

۵۳ در شکل زیر، جعبه‌ای به جرم $80\ kg$ روی سطح افقی به صورت تندشونده در حال حرکت است. اگر اندازهٔ شتاب جعبه $1/5\ m/s^2$ باشد، ضریب اصطکاک جنبشی بین سطح و جعبه کدام است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۰/۱۵
۲) ۰/۴
۳) ۰/۵۵
۴) ۰/۶

Hint با نوشتن قانون دوم نیوتون در راستاهای افقی و قائم و استفاده از رابطهٔ نیروی اصطکاک جنبشی، خواستهٔ تست به دست می‌آید.

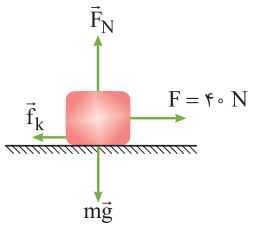
درس Box درس box تست ۵۴ را بخوانید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در شکل زیر، نیروهای وارد بر جسم را رسم کردیم. قانون دوم نیوتون را در راستاهای قائم و افقی می‌نویسیم:

در راستای قائم: $F_{net(y)} = 0 \Rightarrow F_N = mg = 80 \times 10 = 800\ N$

در راستای افقی: $F_{net(x)} = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow 440 - f_k = 80 \times 1/5 \Rightarrow f_k = 320\ N$

گام دوم: با داشتن F_N و f_k، ضریب اصطکاک جنبشی به راحتی قابل محاسبه است.

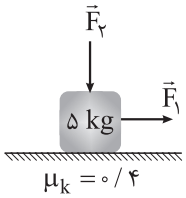


$$f_k = \mu_k F_N \Rightarrow 320 = \mu_k \times 800 \Rightarrow \mu_k = \frac{320}{800} = 0/4$$

AzmoonFree.ir

۵۴ مطابق شکل نیروی افقی $\vec{F}_1$ و نیروی قائم $\vec{F}_2$ به جسم وارد می‌شود و حرکت جسم با شتاب ثابت $2\ m/s^2$ به سمت راست تندشونده است. اندازهٔ نیروی $\vec{F}_2$ را چند نیوتون افزایش دهیم تا در ادامهٔ حرکت، جسم با شتاب ثابت $2\ m/s^2$ کندشونده حرکت کند؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۴۰
۴) ۵۰



مشاوره یکی از مهم‌ترین و تست‌خیزترین مباحث فصل ۲ فیزیک دوازدهم، اصطکاک (و نیروی سطح) است. می‌توان گفت که هر سال، سهم این مبحث در کنکور حداقل یک تست است. برای حل تست‌های این مبحث اولاً باید خوب بدانید انواع نیروهای اصطکاک و نحوهٔ محاسبهٔ آن‌ها کدام است و این‌که هر کدام از آن‌ها در چه شرایطی پدیدار می‌شوند. ثانیاً مهارت کافی در حل تست‌ها، مخصوصاً تست‌های دو حالته را داشته باشید. خلاصهٔ کلام، از این موضوع باید تست‌های زیاد و متنوع حل کنید.

Hint ابتدا برای دو حالت، شکل مناسبی رسم کنید، سپس کافی است قانون دوم نیوتون را در راستاهای افقی و قائم برای دو حالت بنویسید و با کمی محاسبات به جواب تست برسید.

درس Box

۱) فرض کنید مطابق شکل زیر، جسم با یک سطح در تماس است و به آن نیروی محرک $(\vec{F}_{محرک})$ وارد می‌شود. در این حالت سطح به جسم، دو نیرو وارد می‌کند؛ نیروی عمودی سطح $(\vec{F}_N)$ و نیروی اصطکاک $(\vec{f})$.

- اگر $F_{محرک} < f_{s,max}$ باشد، جسم ساکن است و نیروی اصطکاک وارد بر آن ایستایی است:

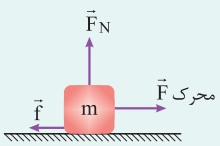
$$f_s = F_{محرک}$$

- اگر $F_{محرک} = f_{s,max}$ باشد، جسم ساکن و در آستانهٔ حرکت است و نیروی اصطکاک وارد بر آن ایستایی بیشینه است:

ضریب اصطکاک ایستایی

$$f_{s,max} = F_N \mu_s = F_{محرک}$$

- اگر $F_{محرک} > f_{s,max}$ باشد، جسم در حال حرکت است و نیروی اصطکاک وارد بر آن جنبشی است:



ضریب اصطکاک جنبشی

$$f_k = F_N \mu_k$$

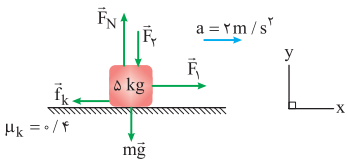
۲) قانون دوم نیوتون:

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در حالت اول، چون جسم به صورت تندشونده به سمت راست در حرکت است، شتاب جسم به طرف راست است. با توجه به شکل (الف) قانون دوم نیوتون را در راستای قائم و افقی می‌نویسیم:

$$F_{net(y)} = 0 \Rightarrow F_N - F_2 - mg = 0 \Rightarrow F_N = F_2 + mg \quad (I)$$

$$F_{net(x)} = ma \Rightarrow F_1 - f_k = ma \Rightarrow F_1 = \mu_k F_N + ma = 0/4F_N + 5\times 2 = 0/4F_N + 10 \quad (II)$$



(الف)

AzmoonFree.ir

گام دوم: در حالت دوم، چون جسم به صورت کندشونده به سمت راست حرکت می‌کند، شتاب به سمت چپ است. با توجه به شکل (ب) داریم:

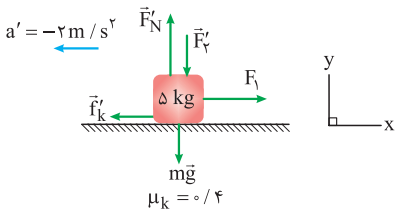
$$F'_{net(y)} = ۰ \Rightarrow F'_N - F'_۲ - mg = ۰ \Rightarrow F'_N = F'_۲ + mg \qquad (III)$$

$$F'_{net(x)} = ۰ \Rightarrow F_۱ - f'_k = ma' \xrightarrow{(II)} ۰/۴F_N + ۱۰ - ۰/۴F'_N = ۵ \times (-۲)$$

$$\Rightarrow ۰/۴(F'_N - F_N) = ۲۰ \Rightarrow F'_N - F_N = \frac{۲۰۰}{۴} = ۵۰\ N$$

$$\xrightarrow{(I),(III)} F'_۲ + mg - (F_۲ + mg) = ۵۰$$

$$\Rightarrow F'_۲ - F_۲ = ۵۰\ N$$



(ب)

یعنی اندازهٔ نیروی $\vec{F}_۲$ باید ۵۰ N افزایش یابد.

AzmoonFree.ir

۵۵ خودرویی به جرم $۱۲۰۰\ kg$ در یک مسیر مستقیم با تندی ثابت در حال حرکت است. رانندهٔ خودرو مانعی را در مقابل خود می‌بیند و ترمز می‌کند. اگر مسافت واکنش $۱۵\ m$، مسافت ترمز $۱۵۰\ m$ و زمان واکنش راننده $۰/۵\ s$ باشد، اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر خودرو در حین ترمز، با فرض ثابت بودن، چند نیوتون است؟ (از نیروی مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۲۴۰۰ ۲) ۳۶۰۰ ۳) ۴۸۰۰ ۴) ۷۲۰۰

Hint

با داشتن مدت‌زمان واکنش و مسافت واکنش و به کمک معادلهٔ جابه‌جایی در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متحرک به دست می‌آید. در ادامه با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی، شتاب متحرک را به دست آورید. در پایان برای محاسبهٔ اندازهٔ نیروی اصطکاک، از قانون دوم نیوتون کمک بگیرید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در مدت‌زمان واکنش، خودرو با تندی ثابت در حرکت است. این تندی ثابت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow ۱۵ = v\times ۰/۵ \Rightarrow v = ۳۰\ m/s$$

گام دوم: از لحظهٔ ترمز تا لحظهٔ توقف، در راستای حرکت خودرو فقط نیروی ثابت اصطکاک به آن وارد می‌شود؛ بنابراین حرکت خودرو با شتاب ثابت کند می‌شود. این شتاب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

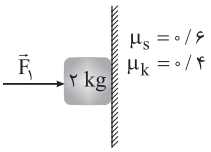
$$v'^{۲} - v^{۲} = ۲a\Delta x' \Rightarrow ۰^{۲} - ۳۰^{۲} = ۲a\times ۱۵۰ \Rightarrow a = \frac{-۹۰۰}{۳۰۰} = -۳\ m/s^{۲}$$

گام سوم: اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر خودرو برابر است با:

$$F_{net} = ma \Rightarrow ۰ - f_k = ma \Rightarrow f_k = -ma = -۱۲۰۰\times(-۳) = ۳۶۰۰\ N$$

AzmoonFree.ir

۵۶ در شکل زیر، نیروی افقی $F_۱ = ۴۰N$ به جسم وارد می‌شود و جسم با تکیه بر دیوار قائم ساکن مانده است. اگر در همین شرایط، نیروی $F_۲ = ۵۶N$ در راستای قائم از پایین به بالا به جسم وارد شود، اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم چند برابر می‌شود؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$



۱) $\frac{۴}{۵}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۵}{۱۲}$

Hint

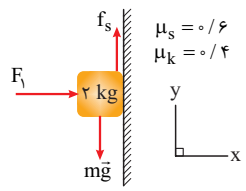
ابتدا برای هر دو حالت، شکل مناسبی رسم کنید و نیروهای وارد بر جسم را مشخص کنید. در حالت اول، با توجه به ساکن‌بودن جسم، نیروی اصطکاک وارد بر آن به راحتی قابل محاسبه است. در حالت دوم، ابتدا باید تشخیص دهید که با واردکردن نیروی $\vec{F}_۲$ جسم حرکت می‌کند یا نه. سپس نیروی اصطکاک وارد بر جسم را با توجه به این موضوع، محاسبه کنید. در پایان هم نسبت این دو نیروی اصطکاک را به دست آورید.

درس Box

درس box تست ۵۴ را بخوانید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

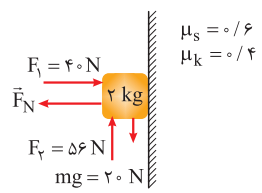
گام اول: مطابق شکل (الف)، نیروهای وارد بر جسم در حالت اول را رسم می‌کنیم. چون جسم ساکن است، نیروی اصطکاک وارد بر آن به صورت زیر به دست می‌آید:



(الف)

$$F_{net(y)} = ۰ \Rightarrow f_s - mg = ۰ \Rightarrow f_s = mg = ۲ \times ۱۰ = ۲۰\ N$$

گام دوم: نیروهای وارد بر جسم در حالت دوم، مطابق شکل (ب) است. در این حالت، نیروی محرک وارد بر جسم برابر با $F_{محرک} = F_۲ - mg = ۵۶ - ۲۰ = ۳۶N$ است. بررسی کنیم که آیا این نیرو می‌تواند باعث حرکت جسم شود یا خیر.



(ب)

$$F_{net(x)} = ۰ \Rightarrow F_۱ - F_N = ۰ \Rightarrow F_N = ۴۰\ N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = ۰/۶ \times ۴۰ = ۲۴\ N$$

چون $F_{محرک} > f_{s,max}$ است، جسم شروع به حرکت می‌کند و نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع جنبشی است، پس:

$$f_k = \mu_k F_N = ۰/۴ \times ۴۰ = ۱۶N$$

گام سوم: نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{f_k}{f_s} = \frac{۱۶}{۲۰} = \frac{۴}{۵}$$

AzmoonFree.ir

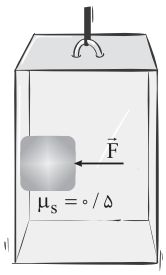
۵۷ در شکل زیر، شخصی درون یک آسانسور که با شتاب ثابتی به بزرگی $۲\ m/s^۲$ به طرف پایین شروع به حرکت کرده، جسمی به جرم $۲\ kg$ را با نیروی افقی $\vec{F}$ به دیوار قائم آسانسور فشرده است. اگر جسم در آستانهٔ سُر خوردن باشد، اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ چند نیوتون است $(g = ۱۰\ N/kg)$

۱) ۱۶

۲) ۲۴

۳) ۳۲

۴) ۴۸



Hint ابتدا شکل مناسبی رسم کنید و نیروهای وارد بر جسم را مشخص کنید. با نوشتن قانون دوم نیوتون در راستاهای افقی و قائم، به راحتی به جواب تست می‌رسید.

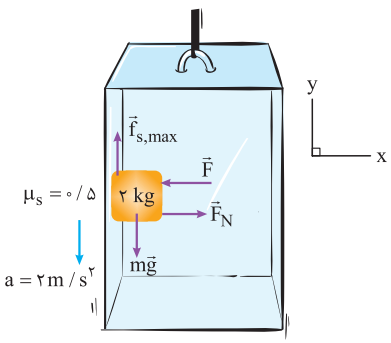
درس Box درس box تست ۵۴ را بخوانید.

پاسخ خیلی تشریحی مطابق شکل زیر نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. قانون دوم نیوتون را در راستای‌ها افقی و قائم می‌نویسیم:

$$F_{net(x)} = ۰ \Rightarrow F_N - F = ۰ \Rightarrow F_N = F$$

$$F_{net(y)} = ۰ \Rightarrow mg - f_{s,max} = ma \Rightarrow ۲\times۱۰ - f_{s,max} = ۲\times۲ \Rightarrow f_{s,max} = ۱۶N$$

$$\Rightarrow \mu_s F_N = ۱۶ \xrightarrow[F_N = F]{\mu_s = ۰/۵} ۰/۵\times F = ۱۶ \Rightarrow F = ۳۲N$$



AzmoonFree.ir

۵۸ به یک فنر قائم یک بار وزنهٔ ۱ نیوتونی و یک بار وزنهٔ ۸ نیوتونی آویزان می‌کنیم. اگر مقدار افزایش طول فنر در حالت دوم ۳/۵cm بیشتر از حالت اول باشد، ثابت فنر چند نیوتون بر سانتی‌متر است؟

۱) ۲
۲) ۲۰
۳) ۲۰۰
۴) ۲۰۰۰

مشاوره نیروی فنر هم یکی دیگر از موضوعات پرطرفدار از فصل ۲ فیزیک دوازدهم، بین طراحان است. کلید حل تست‌های این مبحث، قانون هوک به علاوهٔ قانون دوم نیوتون است.

Hint

قانون هوک را برای دو حالت بنویسید و با حل دو معادله در یک دستگاه، تغییر طول فنر در حالت اول را به دست آورید. سپس با یک جای‌گذاری ساده در معادلهٔ اولیه، ثابت فنر قابل محاسبه است.

درس Box

درس box شمارهٔ (۱) تست ۵۹ را بخوانید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: قانون هوک را برای دو حالت می‌نویسیم:

$$W_1 = F_{e(1)} \Rightarrow 1 = kx_1 \qquad (I)$$

$$W_2 = F_{e(2)} \Rightarrow 8 = kx_2 \xrightarrow{x_2 = x_1 + 3/5\,(cm)} 8 = k(x_1 + 3/5) \qquad (II)$$

رابطهٔ (II) را بر رابطهٔ (I) تقسیم می‌کنیم تا x_1 به دست آید:

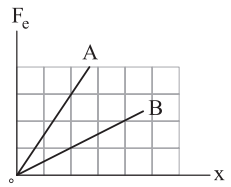
$$\frac{8}{1} = \frac{k(x_1 + 3/5)}{kx_1} \Rightarrow 8x_1 = x_1 + 3/5 \Rightarrow 7x_1 = 3/5 \Rightarrow x_1 = 0/5\ cm$$

گام دوم: با جای‌گذاری x_1 در رابطهٔ (I)، k به دست می‌آید:

$$1 = k \times 0/5 \Rightarrow k = 2\ N/cm$$

AzmoonFree.ir

۵۹ نمودار اندازهٔ نیروی کشسانی دو فنر **A** و **B** برحسب تغییر طول آن‌ها نسبت به طول عادی به شکل زیر است. توسط فنر **A**، جسمی به جرم **m** و توسط فنر **B**، جسمی به جرم **۲m** روی سطح افقی کشیده می‌شوند. اگر دو جسم با شتاب یکسان شروع به حرکت کنند، افزایش طول فنر **A** نسبت به حالت عادی آن، چند برابر افزایش طول فنر **B** نسبت به حالت عادی‌اش است؟ (فنرها در راستای افق هستند. ضریب اصطکاک جنبشی بین هر یک از دو جسم با سطح، یکسان است.)



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{۱}{۶}$

Hint ابتدا به کمک شیب نمودار $F_e - x$، نسبت ثابت فنرها را به دست آورید. سپس به کمک قانون دوم نیوتون برای حرکت افقی اجسام، رابطه‌ای را برای تغییر طول فنر بیابید. در پایان با نوشتن شکل نسبتی این رابطه و به کمک نسبت ثابت فنرها که قبلاً محاسبه کردید، به جواب تست می‌رسید.

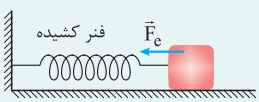
درس Box

۱) قانون هوک: اگر فنری نسبت به حالت عادی خود، به اندازهٔ x کشیده یا فشرده شود، فنر به جسم متصل به خود نیروی کشسانی وارد می‌کند که اندازهٔ آن از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

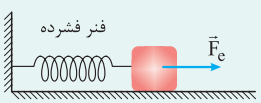
$$F_e = k x$$

(ثابت فنر)

۲) فنر کشیده، جسم متصل به خود را می‌کشد و فنر فشرده، جسم متصل به خود را هل می‌دهد. شکل‌های زیر را ببینید؛ در این شکل‌ها، $\vec{F}_e$ نیرویی است که فنر به جسم وارد می‌کند.

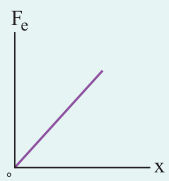


(الف)



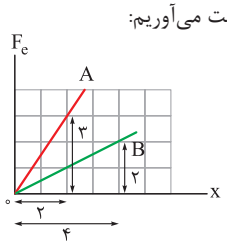
(ب)

۳) شیب نمودار $F_e - x$ برابر با ثابت فنر است.



شیب نمودار $= k$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به شکل (الف)، به کمک شیب نمودار $F_e - x$، نسبت ثابت دو فنر **A** و **B** را به دست می‌آوریم:



(الف)

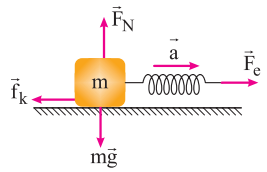
$$\text{فنر A: } k_A = \frac{F_{e(A)}}{x_A} = \frac{\text{۳ واحد}}{\text{۲ واحد}} = \frac{۳}{۲} \text{ واحد}$$

$$\text{فنر B: } k_B = \frac{F_{e(B)}}{x_B} = \frac{\text{۲ واحد}}{\text{۴ واحد}} = \frac{۱}{۲} \text{ واحد}$$

$$\Rightarrow \frac{k_B}{k_A} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

گام دوم: با توجه به شکل (ب)، قانون دوم نیوتون برای حرکت افقی هر یک از اجسام به صورت زیر است:

$$F_e - f_k = ma \Rightarrow kx - \mu_k F_N = ma \xrightarrow{F_N = mg} kx = m(a + \mu_k g) \Rightarrow x = \frac{m}{k}(a + \mu_k g)$$



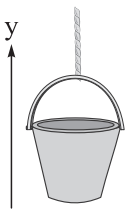
(ب)

این رابطه را به شکل نسبتی برای دو جسم می‌نویسیم (a، μ_k و g برای دو جسم یکسان است):

$$\frac{x_A}{x_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{k_B}{k_A} = \frac{m}{۲m} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

AzmoonFree.ir

۶۰ در شکل زیر، شخصی یک سطل محتوی مصالح را توسط طنابی سبک با شتاب $(۱/۲\ m/s^۲)\vec{j}$ به طرف بالا می‌کشد. اگر اندازهٔ نیروی کشش طناب ۲۰ درصد کاهش یابد، شتاب سطل به چند متر بر مربع ثانیه می‌رسد؟ $(g = ۹/۸\ m/s^۲)$



۱) $-\vec{j}$

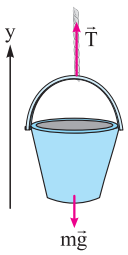
۲) $\vec{j}$

۳) $۱/۲\vec{j}$

۴) $-۱/۲\vec{j}$

Hint در حالت اول، قانون دوم نیوتون را بنویسید تا نیروی کشش طناب در این حالت $(T_۱)$ به دست آید. $T_۲$ را از روی $T_۱$ به دست می‌آوریم. سپس قانون دوم نیوتون را برای حالت دوم می‌نویسیم تا شتاب سطل در این حالت محاسبه شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** قانون دوم نیوتون را به شکل برداری برای حالت اول (شکل (الف)) می‌نویسیم تا نیروی کشش طناب در این حالت به دست آید.



(الف)

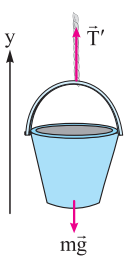
$$\uparrow \vec{a} = (۱/۲\ m/s^۲)\vec{j}$$

$$\vec{F}_{net(y)} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{T} - (۹/۸\ m)\vec{j} = (۱/۲\ m)\vec{j} \Rightarrow \vec{T} = (۱۱\ m)\vec{j}$$

گام دوم: در حالت دوم، اندازهٔ نیروی کشش طناب ۲۰ درصد کاهش می‌یابد؛ پس:

$$T' = T - \frac{۲۰}{۱۰۰}T = \frac{۸}{۱۰}T \xrightarrow{T=۱۱\ m} T' = \frac{۸}{۱۰} \times ۱۱\ m = ۸/۸\ m \Rightarrow \vec{T}' = (۸/۸\ m)\vec{j}$$

با توجه به شکل (ب)، قانون دوم نیوتون را به شکل برداری می‌نویسیم تا شتاب سطل در این حالت به دست آید:



(ب)

$$\vec{F}'_{net(y)} = m\vec{a}' \Rightarrow \vec{T}' + m\vec{g} = m\vec{a}'$$

$$\Rightarrow (۸/۸\ \cancel{m})\vec{j} - (۹/۸\ \cancel{m})\vec{j} = \cancel{m}\vec{a}'$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = (-۱\ m/s^۲)\vec{j}$$

AzmoonFree.ir

فیزیک دهم

۶۱ به جسمی نیروی $\vec{F} = (5N)\vec{j}$ وارد می‌شود. اگر جابه‌جایی جسم در SI برابر $\vec{d} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ باشد، کار انجام‌شده روی جسم توسط نیروی $\vec{F}$ چند ژول است؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۰ ۳) -40 ۴) -50

مشاوره این تیپ سؤال اخیراً مورد توجه طراحان کنکور قرار گرفته. اگه بلد نیستی همین الان کَلکشو بِکن!

درس Box

اگر بردارهای نیرو و جابه‌جایی جسمی در SI به صورت $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$ و $\vec{d} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j}$ باشد، کار نیروی $\vec{F}$ در این جابه‌جایی برابر است با:

$$W = F_x d_x + F_y d_y$$

دقت کنید $F_x d_x$ و $F_y d_y$ به صورت جبری (با در نظر گرفتن علامت) با هم جمع می‌شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق رابطهٔ زیر، کار نیروی $\vec{F}$ را حساب می‌کنیم:

$$W = F_x d_x + F_y d_y \xrightarrow[d_x=6m,\ d_y=-8m]{F_x=0,\ F_y=5N} W = (0\times 6) + (5\times(-8)) = 0 - 40 = -40\,J$$

AzmoonFree.ir

۶۲ خودرویی با تندی $۱۸\ km/h$ در حال حرکت است. برای آن‌که انرژی جنبشی خودرو ۴۴ درصد افزایش یابد، تندی آن باید چند متر بر ثانیه تغییر کند؟

۱) ۱
۲) ۲/۲
۳) ۳/۶
۴) ۴/۴

$\frac{۱۸}{۳/۶}\ m/s = ۵\ m/s$

$K_۲ = K_۱ + \frac{۴۴}{۱۰۰}K_۱ = ۱/۴۴\ K_۱$

مشاوره انرژی جنبشی ازون مبحث آسوناس که خیلی توی کنکور مطرح شده. اگه خیلی هم بخوان سختش کنن، درصدی میدن که بازم خیلی راحته. نکنه یه وقت از دستش بدی!

درس Box

جسمی با جرم m که با تندی v در حال حرکت است، دارای انرژی جنبشی K است که از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$K = \frac{۱}{۲} m v^۲$$

(انرژی جنبشی(J)، جرم(kg)، تندی(m/s))

طبق رابطهٔ بالا، درمی‌یابیم که انرژی جنبشی جسم با جرم جسم و مربع تندی جسم رابطهٔ مستقیم دارد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{K_۲}{K_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} \times (\frac{v_۲}{v_۱})^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نسبت تندی جسم در حالت دوم به حالت اول را به دست می‌آوریم. طبق رابطهٔ مقایسه‌ای انرژی جنبشی داریم:

$$\frac{K_۲}{K_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} \times (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \xrightarrow[m_۱=m_۲]{K_۲=K_۱+\frac{۴۴}{۱۰۰}K_۱=\frac{۱۴۴}{۱۰۰}K_۱} \frac{۱۴۴}{۱۰۰} = ۱ \times (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱} = \frac{۱۲}{۱۰} = ۱/۲$$

گام دوم: تندی جسم را در حالت دوم حساب می‌کنیم:

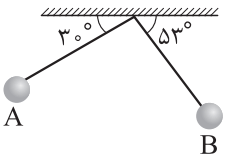
$$\frac{v_۲}{v_۱} = ۱/۲ \xrightarrow{v_۱=۱۸\ km/h} \frac{v_۲}{۱۸} = ۱/۲ \Rightarrow v_۲ = ۱۸ \times ۱/۲\ km/h$$

گام سوم: تغییر تندی جسم در دو حالت را برحسب m/s به دست می‌آوریم:

$$v_۲ - v_۱ = (۱/۲ \times ۱۸) - ۱۸ = ۰/۲ \times ۱۸\ km/h \times \frac{۱\ m/s}{۳/۶\ km/h} = ۰/۲ \times ۵\ m/s = ۱\ m/s$$

AzmoonFree.ir

۶۳ در شکل زیر، گلولهٔ آونگی به طول $۱/۲m$ از نقطهٔ **A** رها شده و در طرف دیگر تا نقطهٔ **B** بالا می‌رود. اگر جرم گلوله‌ء آونگ $۵۰۰\,g$ باشد، کار انجام‌شده توسط نیروی وزن روی گلوله چند ژول است؟ $(\sin ۵۳^\circ = ۰/۸ \,,\, g = ۱۰\,N/kg)$



۱) $۱/۲$

۲) $-۱/۲$

۳) $۱/۸$

۴) $-۱/۸$

Hint اول تغییر ارتفاع از A تا B رو به دست بیار، بعدش کار نیروی وزن رو حساب کن.

درس Box کار نیروی وزن در یک جابه‌جایی برابر است با:

$$W_{mg} = -mg\Delta h$$

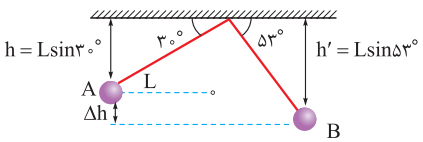
m: جرم جسم (kg)

g: شتاب گرانش $g \simeq ۱۰\,N/kg$

Δh: تغییر ارتفاع جسم (m)

تذکر: اگر جسم به سمت بالا برود، $\Delta h > ۰$ و اگر جسم به سمت پایین برود، $\Delta h < ۰$ خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** تغییر ارتفاع جسم از A تا B (Δh) را به دست می‌آوریم. مطابق شکل زیر داریم:



$$|\Delta h| = h' - h = L\sin ۵۳^\circ - L\sin ۳۰^\circ = L(\sin ۵۳^\circ - \sin ۳۰^\circ)$$

$$\xrightarrow[\sin ۵۳^\circ = ۰/۸ \,,\, \sin ۳۰^\circ = ۰/۵]{L = ۱/۲m} |\Delta h| = ۱/۲(۰/۸ - ۰/۵) = ۱/۲ \times ۰/۳ = ۰/۳۶\,m$$

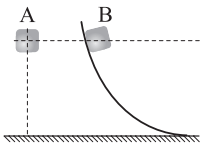
$$\xrightarrow[\Delta h < ۰]{\text{حرکت رو به پایین}} \Delta h = -۰/۳۶\,m$$

گام دوم: کار نیروی وزن را در جابه‌جایی از A تا B حساب می‌کنیم:

$$W_{mg} = -mg\Delta h \xrightarrow[\Delta h = -۰/۳۶m]{m = ۵۰۰g = ۰/۵kg} W_{mg} = -۰/۵ \times ۱۰ \times (-۰/۳۶) = ۱/۸\,J$$

AzmoonFree.ir

۶۴ در شکل زیر، جسم **A** از حال سکون سقوط می‌کند و جسم **B** روی مسیر بدون اصطکاک رها می‌شود. کدام مورد دربارهٔ مقایسهٔ تندی (**v**) و انرژی جنبشی (**K**) دو جسم در سطح زمین الزاماً درست است؟



الف) $v_A > v_B$

ب) $v_A = v_B$

پ) $K_A > K_B$

ت) $K_A = K_B$

۱) الف ۲) ب

۳) الف و پ ۴) ب و ت

مشاوره اخیراً گزینشگر کنکور دوست داره یکی از این سؤالا توی دفترچه باشه. بهت تقلبشو رسوندم که بعداً عذاب وجدان نگیرم!

درس Box

قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی:

در یک جابه‌جایی معین کار کل وارد بر یک جسم برابر با تغییر انرژی جنبشی جسم است و مطابق رابطهٔ زیر داریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

W_t : کار کل (J)

ΔK : تغییر انرژی جنبشی (J)

m : جرم (kg)

v_1 : تندی اولیه (m/s)

v_2 : تندی نهایی (m/s)

نکته اگر جسمی از حال سکون رها شود و در هر مسیری رو به پایین حرکت کند و تنها نیروی وزن بر روی آن کار انجام دهد (یعنی اصطکاک و مقاومت هوا و... نداشته باشیم)، تندی نهایی جسم در پایین مسیر (نقطه‌ای که ارتفاع آن به اندازهٔ h کم‌تر از ارتفاع شروع حرکت است)، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{2gh}$$

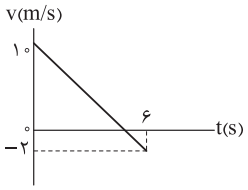
پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به این‌که هر دو جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده و به اندازهٔ یکسان پایین آمده‌اند و تنها نیرویی که بر روی هر دو جسم کار انجام می‌دهد، نیروی وزن است، طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$v = \sqrt{2gh} \xrightarrow{h_A = h_B} v_A = v_B$$

از طرفی با توجه به این‌که اطلاعاتی در مورد جرم دو جسم نداریم، نمی‌توانیم با قطعیت انرژی جنبشی دو جسم را که به جرم هم بستگی دارد، مقایسه کنیم؛ بنابراین تنها موردی که الزاماً درست است، مورد «ب» است.

AzmoonFree.ir

۶۵ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی به جرم $۳kg$ که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کار کل انجام‌شده بر روی متحرک در دو ثانیهٔ سوم چند ژول است؟



۱) -۳۲

۲) -۱۸

۳) -۶۴

۴) صفر

درس Box

چگونه با استفاده از دو نقطه از یک خط، معادلهٔ آن را به دست آوریم؟

اگر محور عمودی را y و محور افقی را x در نظر بگیریم، معادلهٔ خط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y=(\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱})x+y_۱$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ $v-t$ را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که نمودار $v-t$ به صورت خطی است، طبق درس box معادلهٔ خط را به دست می‌آوریم:

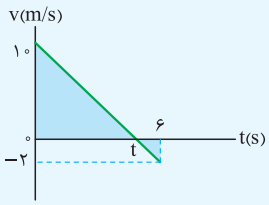
$$v=(\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱})t+v_۱ \Rightarrow v=(\frac{-۲-۱۰}{۶-۰})t+۱۰ \Rightarrow v=-۲t+۱۰$$

گام دوم: سرعت متحرک را در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی دو ثانیهٔ سوم یعنی لحظه‌های $t_۱=۴s$ و $t_۲=۶s$ به دست می‌آوریم:

$$v=-۲t+۱۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱=۴s \Rightarrow v_۱=-۲(۴)+۱۰=۲\ m/s \\ t_۲=۶s \Rightarrow v_۲=-۲(۶)+۱۰=-۲\ m/s \end{cases}$$

یه جور دیگه

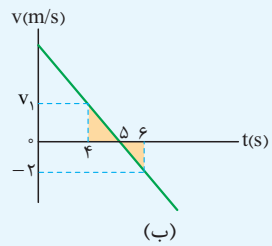
در شکل (الف) مثلث‌های رنگی متشابه‌اند؛ بنابراین t به صورت زیر به دست می‌آید:



(الف)

$$\frac{۱۰}{۲}=\frac{t}{۶-t} \Rightarrow ۳۰-۵t=t \Rightarrow ۶t=۳۰ \Rightarrow t=۵\ s$$

دو ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی $t_۱=۴\ s$ تا $t_۲=۶\ s$ باتوجه به شکل (ب) و تشابه مثلث‌های رنگی، سرعت در لحظهٔ $t_۱=۴\ s$ به صورت زیر به دست می‌آید:



(ب)

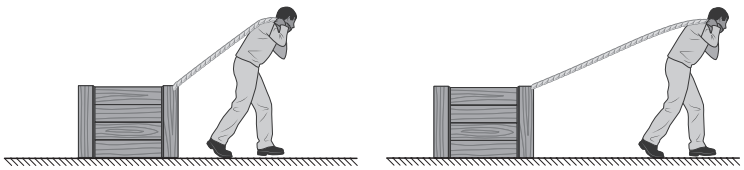
$$\frac{v_۱}{۲}=\frac{۶-۵}{۵-۴} \Rightarrow v_۱=۲\ m/s$$

گام سوم: با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، کار کل را در بازهٔ زمانی $t_۱=۴s$ تا $t_۲=۶s$ به دست می‌آوریم:

$$W_t=\Delta K=\frac{۱}{۲}m(v_۲^۲-v_۱^۲) \xrightarrow[v_۲=-۲\ m/s]{m=۳kg\ ,\ v_۱=۲\ m/s} W_t=\frac{۱}{۲}\times ۳\times \overbrace{((-۲)^۲-۲^۲)}^{۰}=۰$$

AzmoonFree.ir

۶۶ شخصی جسم ساکنی را یک‌بار با طنابی بلند (شکل الف) و بار دیگر با طنابی کوتاه (شکل ب) روی سطح افقی بدون اصطکاک می‌کشد. اگر اندازهٔ نیرویی که شخص وارد می‌کند در دو حالت برابر باشد، پس از جابه‌جایی یکسان جسم، به ترتیب از راست به چپ در کدام شکل شخص کار بیشتری انجام می‌دهد و در کدام شکل تندی نهایی جسم بیشتر است؟



(ب) (الف)

۱) الف ـ الف
۲) الف ـ ب
۳) ب ـ الف
۴) ب ـ ب

مشاوره همیشه گفتم بازم میگم! سؤالای کتاب درسی خیلی مهمن، خیلی. ممکنه کپی همون سؤالا رو توی کنکور ببینی.

درس Box

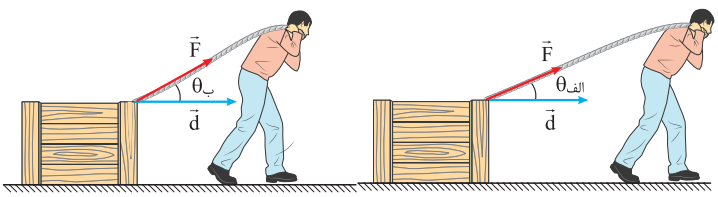
کار نیروی ثابت $\vec{F}$ در جابه‌جایی $\vec{d}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$W = F d \cos\theta$

کار (J)، جابه‌جایی (m)، نیرو (N)، زاویه بین $\vec{d}$ و $\vec{F}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: کار شخص را در شکل‌های (الف) و (ب) با هم مقایسه می‌کنیم. مطابق شکل‌های زیر داریم:



(ب) (الف)

$$W = Fd\cos\theta \Rightarrow \frac{W_{الف}}{W_{ب}} = \frac{F_{الف}}{F_{ب}} \times \frac{d_{الف}}{d_{ب}} \times \frac{\cos\theta_{الف}}{\cos\theta_{ب}}$$

$$\xrightarrow[\theta_{الف}<\theta_{ب} \Rightarrow \cos\theta_{الف}>\cos\theta_{ب}]{F_{الف}=F_{ب}\,,\, d_{الف}=d_{ب}} \frac{W_{الف}}{W_{ب}} = ۱\times۱\times\frac{\cos\theta_{الف}}{\cos\theta_{ب}} > ۱ \Rightarrow W_{الف} > W_{ب}$$

گام دوم: تندی نهایی را در شکل‌های (الف) و (ب) با هم مقایسه می‌کنیم. با توجه به این‌که فقط نیروی شخص بر دو جسم وارد می‌شود، طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \xrightarrow[v_{۱الف}=v_{۱ب}=۰]{W_{t_{الف}}=W_{الف}\,,\, W_{t_{ب}}=W_{ب}} \begin{cases} W_{الف} = \frac{۱}{۲}mv_{الف}^۲ \\ W_{ب} = \frac{۱}{۲}mv_{ب}^۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m_{الف}=m_{ب}} \frac{W_{الف}}{W_{ب}} = \left(\frac{v_{الف}}{v_{ب}}\right)^۲ \xrightarrow{W_{الف}>W_{ب}} \frac{v_{الف}}{v_{ب}} > ۱ \Rightarrow v_{الف} > v_{ب}$$

AzmoonFree.ir

۶۷ از ارتفاع ۱۰۰متری سطح زمین، جسمی با تندی $20\ m/s$ پرتاب می شود. در لحظه‌ای که تندی جسم برابر نصف تندی آن در لحظهٔ برخورد به زمین است، فاصلهٔ جسم از سطح زمین چند متر است؟ ($g = 10\ N/kg$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

۱) ۱۰ ۲) ۵۰ ۳) ۷۵ ۴) ۹۰

درس Box

۱) انرژی جنبشی، انرژی وابسته به حرکت اجسام است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

۲) انرژی پتانسیل گرانشی جسم در ارتفاع h نسبت به مبدأ پتانسیل گرانشی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

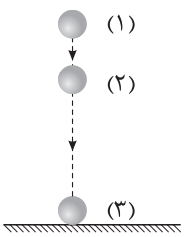
$$U = mgh$$

۳) **اصل پایستگی انرژی مکانیکی:** اگر در مسیر حرکت یک جسم نیروی خارجی، نیروی اصطکاک و مقاومت هوا و ... وجود نداشته باشد، انرژی مکانیکی جسم در تمام طول مسیر ثابت است و می‌توانیم بگوییم:

$$E_1 = E_2 = E_3 = \dots$$

$$\Delta K = \Delta U$$

پاسخ خیلی تشریحی



گام اول: انرژی مکانیکی جسم را به دست می‌آوریم. می‌دانیم با توجه به ناچیزبودن مقاومت هوا، طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی مکانیکی در تمام نقاط یکسان است؛ بنابراین مطابق شکل روبه‌رو، انرژی مکانیکی در تمام نقاط (۱)، (۲) و (۳) برابر با E است.

$$E = E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 \Rightarrow E = (\frac{1}{2}m\times(20)^2) + (m\times10\times100) = 1200\,m$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 = E_3 = 1200\,m$$

گام دوم: انرژی جنبشی جسم را در لحظهٔ برخورد به زمین حساب می‌کنیم:

$$E_3 = K_3 + U_3 \xrightarrow[E_3=1200m]{U_3=0} K_3 = 1200\,m$$

گام سوم: انرژی جنبشی جسم را در لحظه‌ای که تندی‌اش نصف تندی لحظهٔ برخورد به زمین است، حساب می‌کنیم.

می‌دانیم انرژی جنبشی با مربع تندی جسم رابطهٔ مستقیم دارد؛ بنابراین در لحظه‌ای که تندی جسم نصف تندی برخورد به زمین است، انرژی جنبشی آن $\frac{1}{4}$ انرژی جنبشی برخورد به زمین است. در نتیجه داریم:

$$K_2 = \frac{1}{4}K_2 \xrightarrow{K_3=1200\,m} K_2 = \frac{1}{4}\times1200\,m = 300\,m$$

گام چهارم: ارتفاع جسم را در نقطهٔ (۲) حساب می‌کنیم:

$$E_2 = K_2 + U_2 \xrightarrow[K_2=300\,m]{E_2=1200\,m} 1200\,m = 300\,m + U_2$$

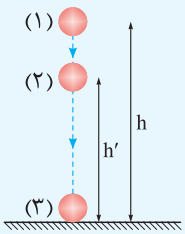
$$\Rightarrow U_2 = 900\,m \xrightarrow{U_2=mgh_2} m\times10\times h_2 = 900\,m \Rightarrow h_2 = 90\,m$$

نکته در شرایطی که جسمی در حال سقوط و مقاومت هوا ناچیز باشد، اگر جسم به اندازهٔ h پایین بیاید، تندی آن از رابطهٔ زیر حساب می‌شود:

$$v = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

AzmoonFree.ir

یه‌جور دیگه طبق نکته داریم:



$$v_۲ = \sqrt{۲gh + v_۱^۲} \Rightarrow v_۲ = \sqrt{(۲\times۱۰\times۱۰۰) + (۲۰)^۲} = \sqrt{۲۴۰۰}\ m/s$$

$$v_۲ = \sqrt{۲gh' + v_۲^۲} \xrightarrow[v_۲=\frac{۱}{۲}v_۲=\frac{\sqrt{۲۴۰۰}}{۲}\ m/s]{v_۲=\sqrt{۲۴۰۰}\ m/s} \sqrt{۲۴۰۰} = \sqrt{(۲\times۱۰\times h') + \frac{۲۴۰۰}{۴}}$$

$$\Rightarrow ۲۴۰۰ = ۲۰h' + ۶۰۰ \Rightarrow ۱۸۰۰ = ۲۰h' \Rightarrow h' = ۹۰\ m$$

AzmoonFree.ir

۶۸ یک توپ فوتبال را از ارتفاع ۳/۲ متری سطح زمین با تندی $۴\ m/s$ به سمت پایین پرتاب می‌کنیم و توپ با تندی $۸\ m/s$ به سطح زمین می‌رسد. اگر کار نیروی مقاومت هوا در طول مسیر $-۳/۶J$ باشد، جرم توپ چند کیلوگرم است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۳۵

۳) ۰/۴ ۴) ۰/۴۵

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم:

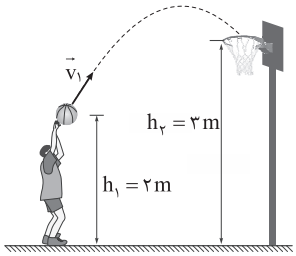
$$W_t = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \xrightarrow{W_t = W_{mg} + W_f} W_{mg} + W_f = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲)$$

$$\xrightarrow[v_۱=۴\ m/s,\ v_۲=۸\ m/s,\ \Delta h=-۳/۲m]{W_{mg}=-mg\Delta h,\ W_f=-۳/۶J} (-m\times ۱۰\times(-۳/۲))+(-۳/۶)=\frac{۱}{۲}m(\underbrace{۸^۲-۴^۲}_{۶۴-۱۶}) \Rightarrow ۳۲m-۳/۶=۲۴m$$

$$\Rightarrow ۸m = ۳/۶ \Rightarrow m = ۰/۴۵\ kg$$

AzmoonFree.ir

۶۹ در شکل زیر، ورزشکار توپی را با تندی $v_1 = 8\ m/s$ به طرف سبد پرتاب می‌کند. اگر از لحظهٔ پرتاب توپ تا لحظهٔ رسیدن آن به دهانهٔ سبد، اندازهٔ کار نیروی مقاومت هوا، نصف انرژی جنبشی توپ در لحظهٔ پرتاب باشد، تندی توپ در لحظهٔ رسیدن به دهانهٔ سبد، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) $\sqrt{3}$

۲) $2\sqrt{3}$

۳) ۲

۴) ۴

مشاوره این مدل سؤالا رو هم می‌تونی با قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی حل کنی و هم قانون پایستگی انرژی. ببین خودت روی کدوم روش تسلط بیشتری داری و انتخاب کن. سعی کن روی یکیش خیلی مسلط‌تر بشی که من پیشنهادم قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشیه!

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K = K_2 - K_1 \xrightarrow[W_f = -\frac{1}{2}K_1]{W_t = W_{mg} + W_f} W_{mg} - \frac{1}{2}K_1 = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{mg} = K_2 - \frac{1}{2}K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2)$$

$$\xrightarrow{W_{mg} = -mg\Delta h} -mg\Delta h = \frac{1}{2}m(v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2) \xrightarrow[v_1 = 8\ m/s]{\Delta h = 3-2 = 1\,m} -10 \times 1 = \frac{1}{2}(v_2^2 - \frac{1}{2}(8^2))$$

$$\Rightarrow -20 = v_2^2 - 32 \Rightarrow v_2^2 = 12 \Rightarrow v_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\ m/s$$

یه جور دیگه طبق قانون پایستگی انرژی داریم:

$$E_2 - E_1 = W_f \Rightarrow K_2 + U_2 - (K_1 + U_1) = W_f \Rightarrow K_2 - K_1 + \Delta U = W_f \Rightarrow K_2 - K_1 + \Delta U = -\frac{1}{2}K_1$$

$$\Rightarrow K_2 - \frac{1}{2}K_1 + \Delta U = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mv_1^2) + mg\Delta h = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{4}v_1^2 + g\Delta h = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2}v_2^2) - (\underbrace{\frac{1}{4}(8)^2}_{16}) + (10 \times 1) = 0 \Rightarrow v_2^2 = 12 \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{3}\ m/s$$

AzmoonFree.ir

۷۰ شخصی به جرم $50\ kg$ درون آسانسور ساکنی قرار دارد. آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی $2\ m/s^2$ به سمت پایین شروع به حرکت می‌کند. کار انجام‌شده روی شخص توسط نیروی عمودی سطح وارد بر آن، در ثانیهٔ اول حرکت چند ژول است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) -600

۲) -400

۳) 600

۴) 400

مشاوره این سؤال یه نکتهٔ اشتباه رو هدف قرار داده که می‌گن کار نیروی عمود بر یه سطح همیشه صفره. حواست باشه هر نکته‌ای رو دیدی یاد بگیر و منطقش رو بدون، نه این‌که فقط حفظ کنی.

Hint اول مقدار نیروی عمودی سطح رو به دست بیار، بعدش جابه‌جایی آسانسور رو حساب کن. در نهایت کار ناشی از نیروی عمودی سطح رو حساب کن.

درس Box اگر جسمی بر روی کف آسانسوری قرار داشته باشد، برای محاسبهٔ نیروی عمودی کف آسانسور بر جسم از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$F_N = m(g \pm a)$$

m: جرم جسم (kg) — a: اندازهٔ شتاب آسانسور (m/s^2) — g: شتاب گرانش (m/s^2)

$+$: جهت شتاب آسانسور رو به بالا (شروع حرکت رو به بالا)

$-$: جهت شتاب آسانسور رو به پایین (شروع حرکت رو به پایین)

نکته جهت نیروی عمودی سطح کف آسانسور بر روی جسم، به سمت بالا است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** نیروی عمودی سطح وارد بر جسم از طرف آسانسور را حساب می‌کنیم:

شروع حرکت رو به پایین $\Rightarrow$ جهت شتاب رو به پایین $\Rightarrow F_N = m(g-a)$

$$\xrightarrow[a=2\ m/s^2]{m=50\ kg} F_N = 50\times(10-2) = 50\times 8 = 400\ N$$

گام دوم: جابه‌جایی در ثانیهٔ اول را حساب می‌کنیم:

$$d = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow[a=2\ m/s^2,\ t=1s]{v_0=0} d = \frac{1}{2}\times 2\times(1^2) + 0\times 1 = 1\ m$$

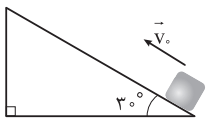
گام سوم: کار نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم:

$$W_{F_N} = F_N d\cos\theta \xrightarrow[\cos\theta=-1]{F_N=400\ N,\ d=1m} W_{F_N} = 400\times 1\times(-1) = -400\ J$$

AzmoonFree.ir

۷۱ در شکل زیر، جسمی را با تندی اولیهٔ $10\ m/s$ موازی با سطح رو به بالا پرتاب می‌کنیم. تندی این جسم پس از $4m$ جابه‌جایی روی سطح به $2\ m/s$ می‌رسد. در این بازهٔ زمانی، چند درصد از انرژی جنبشی اولیهٔ جسم توسط کار نیروی اصطکاک تلف شده است؟

$(g = 10\ N/kg)$



۱) ۱۶

۲) ۲۰

۳) ۵۶

۴) ۶۰

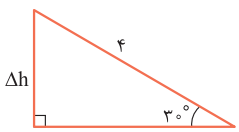
Hint اول کار کل و کار نیروی وزن رو حساب کن. بعدش کار نیروی اصطکاک رو به دست بیار. در نهایت نسبت کار نیروی اصطکاک به انرژی جنبشی اولیه رو به صورت درصدی حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: کار کل در این جابه‌جایی را با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی حساب می‌کنیم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow W_t = \frac{1}{2}\times m \times (\underbrace{2^2 - 10^2}_{4-100}) = -48\ m$$

گام دوم: کار نیروی وزن را در این جابه‌جایی حساب می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:



$$W_{mg} = -mg\Delta h \Rightarrow W_{mg} = (-)m\times 10 \times (\underbrace{4\times \sin 30^\circ}_{2}) = -20\ m$$

گام سوم: کار نیروی اصطکاک را به دست می‌آوریم:

$$W_t = W_{mg} + W_f \Rightarrow -48\ m = -20\ m + W_f \Rightarrow W_f = -28\ m$$

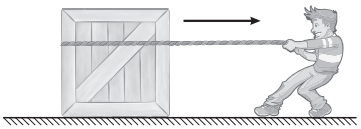
گام چهارم: نسبت درصدی مقدار کار نیروی اصطکاک به انرژی جنبشی اولیه را به دست می‌آوریم:

$$\frac{|W_f|}{K_1}\times 100 = \frac{28m}{\frac{1}{2}m\times 10^2}\times 100 = \frac{28}{0/5} = \%56$$

AzmoonFree.ir

۷۲ در شکل زیر، شخصی با نیروی افقی ۵۵۰N جعبه‌ای به جرم ۱۰۰ kg را از حال سکون به حرکت در می‌آورد و پس از ۴ s طناب پاره می‌شود. از لحظهٔ شروع حرکت جعبه تا توقف آن، قدرمطلق کار انجام‌شده توسط نیروی اصطکاک روی جعبه چند کیلوژول است؟

$(g = ۱۰ \frac{N}{kg})$



$\mu_k = ۰/۵$

۱) ۰/۲

۲) ۱/۱

۳) ۲

۴) ۲/۲

مشاوره توی این سؤال حرکت‌شناسی، دینامیک و کار و انرژی به زیبایی با هم ترکیب شدن. حتماً علامت‌گذاری کن، چون خیلی به درد روزای جمع‌بندیت می‌خوره!

درس Box

برای محاسبهٔ جابه‌جایی در سؤالاتی که متحرک در چند بخش با شتاب‌های مختلف مسیر را می‌پیماید، باید طبق استراتژی زیر، مسئله را حل کنیم:

۱) شتاب را در هر بخش به دست آوریم.

۲) با داشتن شتاب هر بخش و سرعت اولیه، نمودار $v-t$ را که شیب آن همان شتاب است، رسم می‌کنیم.

۳) از روی مساحت محصور بین نمودار $v-t$ با محور t، جابه‌جایی را به دست می‌آوریم.

نیروی اصطکاک جنبشی همواره خلاف جهت حرکت جسم است و طبق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

ضریب اصطکاک جنبشی

$$f_k = \mu_k F_N$$

نیروی اصطکاک جنبشی (N) — نیروی عمودی سطح (N)

کار نیروی اصطکاک جنبشی برابر است با:

مسافت طی‌شده (m)

$$W_{f_k} = -f_k d$$

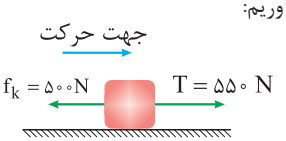
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروی اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم:

$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow{F_N = mg} f_k = \mu_k mg \xrightarrow[m=۱۰۰kg]{\mu_k = ۰/۵} f_k = ۰/۵ \times ۱۰۰ \times ۱۰ = ۵۰۰\ N$$

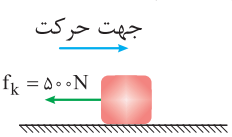
گام دوم: شتاب جسم قبل و پس از پاره‌شدن طناب را به دست می‌آوریم:

قبل از پاره‌شدن طناب:



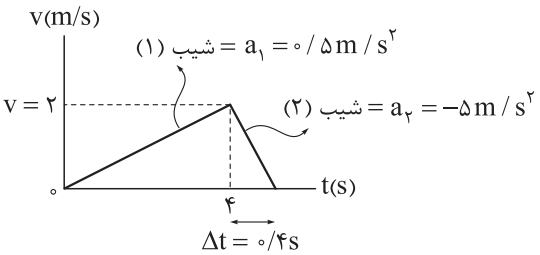
$$F_{net_۱} = ma_۱ \Rightarrow \quad - \quad = ۱۰۰ a_۱ \Rightarrow a_۱ = ۰/۵\ m/s^۲$$

پس از پاره‌شدن طناب:



$$F_{net_۲} = ma_۲ \Rightarrow ۰ - ۵۰۰ = ۱۰۰ a_۲ \Rightarrow a_۲ = -۵\ m/s^۲$$

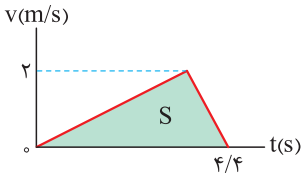
گام سوم: نمودار $v-t$ حرکت را رسم می‌کنیم:



AzmoonFree.ir

$$\text{شیب} = \frac{\text{عمود}}{\text{افق}} \Rightarrow \begin{cases} (۱)\ \text{شیب}: ۰/۵ = \dfrac{v}{۴} \Rightarrow v = ۲\ m/s \\ (۲)\ \text{شیب}: -۵ = \dfrac{-۲}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = ۰/۴\ s \end{cases}$$

گام چهارم: جابه‌جایی جسم را در کل حرکت حساب می‌کنیم:



$$d = S = \frac{۴/۴ \times ۲}{۲} = ۴/۴\ m$$

گام پنجم: کار نیروی اصطکاک را به دست می‌آوریم:

$$W_{f_k} = -f_k d \Rightarrow W_{f_k} = -۵۰۰ \times ۴/۴ = -۲۲۰۰\ J \times \frac{۱\ kJ}{۱۰۰۰\ J} = -۲/۲\ kJ \Rightarrow |W_{f_k}| = ۲/۲\ kJ$$

AzmoonFree.ir

۷۳ جرم اتاقک بالابری به همراه بار آن $۶۰۰\,kg$ است. اگر این بالابر در مدت $۱۰\,s$ با تندی ثابت به اندازهٔ $۵m$ بالا رود، توان متوسط موتور این بالابر چند اسب بخار است؟ ($g = ۱۰\,N/kg$ ، $۱\,hp = ۷۵۰W$ و نیروی اتلافی ناچیز است.)

۱) ۴ ۲) ۴۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳۰۰

درس Box

توان متوسط برابر است با نسبت کار انجام‌شده به مدت‌زمان انجام کار و مطابق رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

(توان متوسط (W)، کار (J)، زمان (s))

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: کار بالابر بر روی جسم را حساب می‌کنیم. طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \xrightarrow{v_۱ = v_۲} W_t = ۰ \xrightarrow{W_t = W_{mg} + W_{\text{بالابر}}} W_{mg} + W_{\text{بالابر}} = ۰$$

$$\Rightarrow W_{\text{بالابر}} = -W_{mg} \xrightarrow{W_{mg} = -mg\Delta h} W_{\text{بالابر}} = mg\Delta h \xrightarrow{m=۶۰۰kg,\ \Delta h=۵m} W_{\text{بالابر}} = ۶۰۰ \times ۱۰ \times ۵ = ۳۰۰۰۰J$$

گام دوم: توان متوسط بالابر را حساب می‌کنیم:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۱۰\,s]{W = ۳۰۰۰۰\,J} P_{av} = \frac{۳۰۰۰۰}{۱۰} = ۳۰۰۰W \times \frac{۱\,hp}{۷۵۰W} = ۴hp$$

AzmoonFree.ir

۷۴ هواپیمایی به جرم ۶۰ تن از سطح زمین به حرکت در می‌آید و پس از ۵ دقیقه از ارتفاع ۶۲۵ متری سطح زمین با تندی $100\ m/s$ عبور می‌کند. با چشم‌پوشی از نیروی مقاومت هوا، توان متوسط موتور هواپیما حداقل چند مگاوات است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲۲/۵ ۳) ۱ ۴) ۱۰

Hint اول کار کل و کار نیروی وزن رو حساب کن. بعدش کار موتور هواپیما رو به دست بیار. در نهایت توان متوسط موتور رو حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: کار کل را حساب می‌کنیم. طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow W_t = \frac{1}{2}\times 60\times 10^3 \times (100^2 - 0) = 3\times 10^8\ J$$

گام دوم: کار نیروی وزن را حساب می‌کنیم:

$$W_{mg} = -mg\Delta h \Rightarrow W_{mg} = -60\times 10^3 \times 10 \times 625 = -3/75\times 10^8\ J$$

گام سوم: کار موتور هواپیما را به دست می‌آوریم:

$$W_t = W_{mg} + W_{موتور} \Rightarrow 3\times 10^8 = -3/75\times 10^8 + W_{موتور} \Rightarrow W_{موتور} = 6/75\times 10^8\ J$$

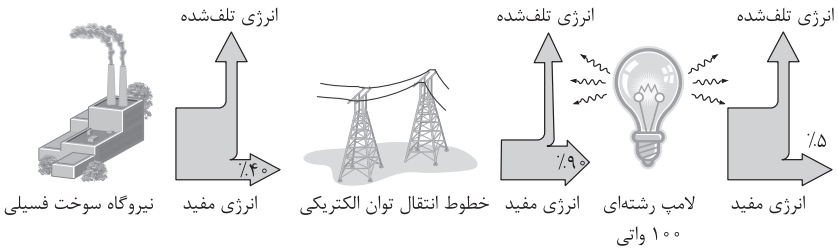
گام چهارم: توان متوسط موتور هواپیما را به دست می‌آوریم:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 5\ min \times \frac{60\ s}{1\ min} = 300\ s]{W = 6/75\times 10^8\ J} P_{av} = \frac{6/75\times 10^2 \times 10^6}{300} = 2/25\times 10^6\ W \times \frac{1MW}{10^6\ W} = 2/25MW$$

AzmoonFree.ir

۷۵ شکل زیر طرحواره‌ای از درصد انرژی مفید و انرژی تلف شده در یک نیروگاه سوخت فسیلی را از آغاز تا مصرف در یک لامپ رشته‌ای نشان می‌دهد. با مصرف $۲۰\,L$ گازوئیل در نیروگاه، لامپ رشته‌ای به مدت چند ساعت روشن می‌ماند؟ (با سوختن هر لیتر گازوئیل در نیروگاه، $۳۰MJ$ انرژی گرمایی تولید می‌شود.)

مشاوره توی محاسبات این سؤال، حتماً حواست به صفرها باشه که گیر نیفتی.



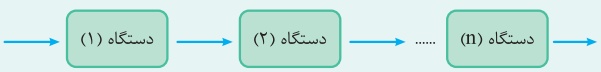
۱) ۶۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳۰۰

درس Box

بازده برابر است با نسبت کار مفید به کل کار و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$Ra = \frac{W_{\text{مفید}}}{W_{\text{کل}}} = \frac{E_{\text{مفید}}}{E_{\text{مصرفی یا کل}}} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی یا مصرفی}}}$$

نکته اگر از کار ورودی تا کار خروجی مطابق شکل زیر، چند بازده داشتیم، بازده کل برابر است با ضرب تمام بازده‌ها در یکدیگر.



$$Ra_{\text{کل}} = Ra_۱ \times Ra_۲ \times ... \times Ra_n$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** انرژی حاصل از مصرف $۲۰\,L$ گازوئیل (انرژی مصرفی) را حساب می‌کنیم:

$$E_{\text{مصرفی}} = ۲۰\,L_{\text{گازوئیل}} \times \frac{۳۰\,MJ}{۱\,L_{\text{گازوئیل}}} = ۶۰۰\,MJ$$

گام دوم: بازده کل را تا رسیدن انرژی به لامپ، حساب می‌کنیم:

$$Ra_{\text{کل}} = Ra_۱ \times Ra_۲ \xrightarrow[Ra_۲ = \frac{۹۰}{۱۰۰} = ۰/۹]{Ra_۱ = \frac{۴۰}{۱۰۰} = ۰/۴} Ra_{\text{کل}} = ۰/۴ \times ۰/۹ = ۰/۳۶$$

گام سوم: انرژی مفیدی را که به لامپ می‌رسد، به دست می‌آوریم:

$$Ra_{\text{کل}} = \frac{E_{\text{مفید}}}{E_{\text{مصرفی}}} \Rightarrow ۰/۳۶ = \frac{E_{\text{مفید}}}{۶۰۰} \Rightarrow E_{\text{مفید}} = ۲۱۶MJ$$

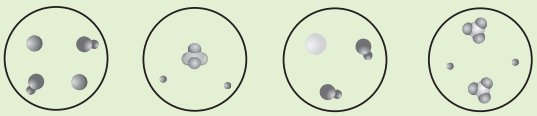
گام چهارم: مدت‌زمان روشن‌ماندن لامپ را حساب می‌کنیم:

$$P = \frac{E}{t} \Rightarrow ۱۰۰ = \frac{۲۱۶ \times ۱۰^۶}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = ۲۱۶ \times ۱۰^۴\,s \times \frac{۱\,h}{۳۶۰۰\,s} = ۶۰۰\,h$$

AzmoonFree.ir

شیمی دوازدهم

۷۶ با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به واکنش برخی اکسیدها با آب است، کدام موارد زیر درست است؟



(۱) (۲) (۳) (۴)

مشاوره این سؤال که برگرفته از «خودرابیازمایید» کتاب درسی می‌باشد، در امتحان نهایی (سال ۱۴۰۰) نیز آمده است که *نشون می‌ده* شکل‌های کتاب درسی چه‌قدر می‌تونه برای طراحان مهم باشه!

الف) رنگ کاغذ pH در حضور محلول‌های (۲) و (۳) مشابه یکدیگر است.

ب) حل‌شوندهٔ محلول (۱) می‌تواند هیدروکسید فلزی از گروه دوم جدول تناوبی باشد. $M(OH)_2$

پ) حل‌شوندهٔ محلول‌های (۲) و (۴) به ترتیب می‌توانند $SO_3(g)$ و $N_2O_5(s)$ باشند.

ت) آنیون‌های محلول‌های (۲) و (۴) از نظر شمار پیوندهای کووالانسی مشابه یکدیگر هستند.

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ب

۳) پ ـ ت ۴) ب ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

محلول‌هایی که در آن‌ها یون H^+ (●) وجود دارد، خاصیت اسیدی دارند ← (۲) و (۴)

محلول‌هایی که در آن‌ها یون OH^- (●●) وجود دارد، خاصیت بازی دارند ← (۱) و (۳)

بررسی عبارت‌ها:

الف) محلول (۲) خاصیت اسیدی دارد و کاغذ pH در آن به رنگ سرخ درمی‌آید، در حالی که محلول (۳) خاصیت بازی دارد و کاغذ pH در آن به رنگ آبی درمی‌آید.

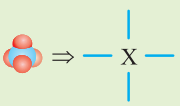
ب) فلزهای گروه دوم جدول، یون دو بار مثبت تشکیل می‌دهند؛ بنابراین فرمول هیدروکسید آن‌ها به صورت $M(OH)_2$ است. در محلول این هیدروکسید، شمار یون‌های OH^- دو برابر شمار یون‌های M^{2+} است، در حالی که در شکل (۱) شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها با هم برابر است.

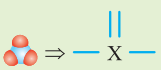
پ) با توجه به معادلهٔ واکنش این اکسیدها با آب، *همه چی درسته!*

$$N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$

$$SO_3(g) + H_2O(l) \rightarrow 2H^+(aq) + SO_4^{2-}(aq)$$

ت) با توجه به مدل فضاپرکن آنیون‌های محلول‌های (۲) و (۴)، در ساختار هر دو آنیون، چهار پیوند اشتراکی وجود دارد:





این آنیون‌ها می‌توانند SO_4^{2-} و NO_3^- باشند.

AzmoonFree.ir

۷۷ در بین موارد زیر، به ترتیب از راست به چپ، چه تعداد رسانای الکترونی و چه تعداد رسانای یونی وجود دارد؟

$$Fe(s), CH_3COCH_3(aq), C(s, \text{گرافیت}), NaCl(s), MgCl_2(l), S(s), KBr(aq)$$

۱) ۲ ـ ۳
۲) ۳ ـ ۲
۳) ۲ ـ ۲
۴) ۳ ـ ۴

نکته رساناها را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

نوع رسانا	علت رسانایی	مثال
الکترونی	حرکت الکترون‌ها	فلزها و گرافیت
یونی	حرکت یون‌ها	محلول‌های الکترولیت و نمک‌های مذاب

پاسخ خیلی تشریحی رسانای الکترونی: $C(s, \text{گرافیت})$ و $Fe(s)$

رساناهای یونی: $KBr(aq)$ ، $MgCl_2(l)$

دقت کنید که ترکیب‌های یونی در حالت جامد (مانند $NaCl(s)$)، رسانا نیستند، زیرا یون‌ها در حالت جامد نمی‌توانند آزادانه حرکت کنند. هم‌چنین موادی مانند استون ($CH_3\overset{\overset{O}{\|}}{C}CH_3$) که به شکل مولکولی در آب حل می‌شوند، رسانای جریان برق نیستند، زیرا در محلول آن‌ها یون وجود ندارد.

AzmoonFree.ir

۷۸ با توجه به جدول زیر، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

اسید	غلظت مولی محلول	درجهٔ یونش	$[H^+]$
HA	۰/۰۴	۱	x
HB	۰/۰۲	$۱۰^{-۱/۷}$	y

۱) ۱۰۰

۲) ۲۰۰

۳) ۱۰۰۰

۴) ۲۰۰۰

مشاوره این سؤال برگرفته از یکی از سؤالات کنکور (ریاضی خارج تیر ۱۴۰۳) می‌باشد.

نکته اگر غلظت مولی محلول یک اسید برابر M و درجهٔ یونش اسید در محلول برابر α باشد، غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید را می‌توان از رابطهٔ مقابل به دست آورد: $[H^+] = M\alpha$

پاسخ خیلی تشریحی

$$[H^+] = M\alpha \begin{cases} \text{HA محلول: } x = ۰/۰۴ \times ۱ = ۰/۰۴ \ mol.L^{-۱} \\ \text{HB محلول: } y = ۰/۰۲ \times ۱۰^{-۱/۷} = ۰/۰۲ \times ۱۰^{-۲} \times \underbrace{۱۰^{۰/۳}}_{۲} = ۰/۰۴ \times ۱۰^{-۲} \ mol.L^{-۱} \end{cases}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{۰/۰۴}{۰/۰۴ \times ۱۰^{-۲}} = ۱۰۰$$

AzmoonFree.ir

۷۹ در محلول ۰/۲ مولار استیک اسید در آب، به ترتیب از راست به چپ، کدام گونه‌ها (بدون در نظر گرفتن مولکول‌های آب)، بیشترین و کم‌ترین غلظت مولی را دارند؟

اسید ضعیف

۱) OH^-, H^+

۲) OH^-, CH_3COOH

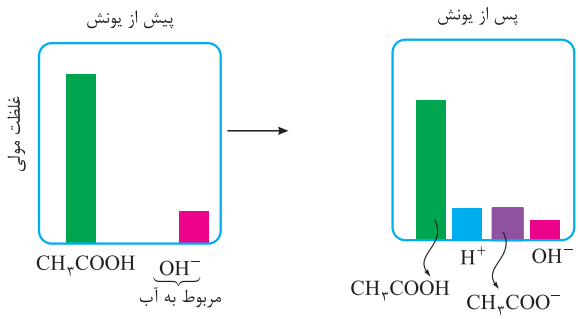
۳) CH_3COOH, CH_3COO^-

۴) H^+, CH_3COOH

پاسخ خیلی تشریحی

استیک اسید (CH_3COOH) یک اسید ضعیف است و بیشتر به صورت یونیده‌نشده در محلول باقی می‌ماند، به عبارت دیگر غلظت یون‌های حاصل از یونش (CH_3COO^- و H^+) در محلول آن کم است. از طرفی در محلول‌های اسیدی، $[H^+]$ از $[OH^-]$ بیشتر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

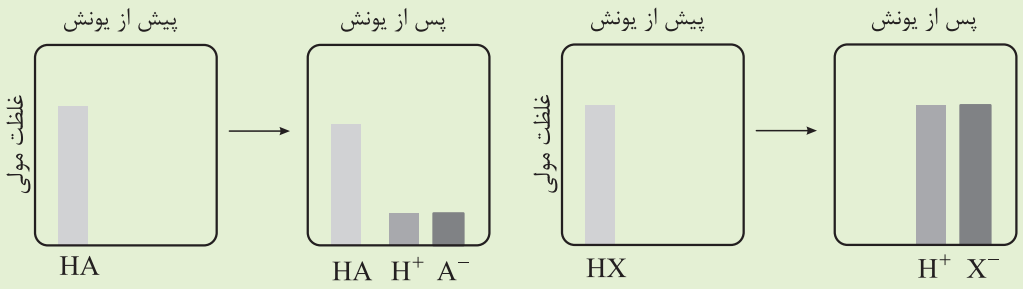
غلظت مولی : $CH_3COOH > H^+ = CH_3COO^- > OH^-$



AzmoonFree.ir

۸۰ با توجه به شکل‌های زیر که غلظت نسبی گونه‌ها را در محلول دو اسید **HA** و **HX** در دما و غلظت یکسان نشان می‌دهند، کدام موارد از مطالب داده‌شده درست است؟

مشاوره شناخت اسیدهای قوی و ضعیف به کمک نمودارهای ستونی یا نمای ذره‌ای محلول، از مباحث مهم فصل اول هستند و سابقهٔ طرح‌شدن در امتحان نهایی (سال ۹۸) و کنکور تجربی ۱۴۰۲ را دارد.



الف) هر دو اسید **HA** و **HX** تک‌پروتون‌دار هستند و با انحلال هر مول از آن‌ها در آب، یک مول H^+ تولید می‌شود.

ب) اگر از انحلال هر ۵۰۰ مولکول **HA** در شرایط معین، ۲۴ یون تولید شده باشد، درصد یونش آن برابر ۲/۴ درصد است.

پ) اگر عنصرهای **A** و **X** هر دو جزء عنصرهای گروه ۱۷ جدول دوره‌ای باشند، واکنش‌پذیری عنصر **A** بیشتر از عنصر **X** است.

ت) **pH** محلول ۰/۵ مولار **HX**، بیشتر از محلول ۰/۵ مولار **HA** است.

۱) الف ـ ب ـ پ

۲) ب ـ پ

۳) الف ـ پ

۴) ب ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

HA به طور جزئی یونیده شده؛ بنابراین جزو اسیدهای ضعیف است، در حالی که HX به طور کامل به یون تبدیل شده و در نتیجه جزء اسیدهای قوی می‌باشد.

بررسی عبارت‌ها:

الف)

نکته به اسیدهایی که هر مولکول آن‌ها در آب، فقط می‌تواند یک یون هیدرونیوم تولید کند، اسیدهای تک‌پروتون‌دار می‌گویند. به عبارت دیگر، به اسیدهایی که هر مول از آن‌ها در آب حداکثر می‌تواند یک مول یون H^+ تولید کند، اسید تک‌پروتون‌دار می‌گویند. HCl، HF، HNO_3، HCN و کربوکسیلیک اسیدهای یک‌عاملی مانند CH_3COOH، جزء اسیدهای تک‌پروتون‌دار هستند.

HA اسید ضعیف تک پروتون‌دار است و هر مول از آن در آب، مقدار ناچیزی یون H^+ تولید می‌کند.

ب) هر مولکول HA که یونش یابد، دو یون (H^+ و A^-) تولید می‌کند؛ بنابراین برای تولید ۲۴ یون کافی است که تنها ۱۲ مولکول یونیده شود:

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

اولیه: ۵۰۰ ۰ ۰

نهایی: $500-x$ x $x \Rightarrow 2x=24 \Rightarrow x=12$

$$\text{درصد یونش} = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده‌شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل‌شده}} \times 100 = \frac{12}{500} \times 100 = \%2/4$$

پ) اگر A و X، هر دو جزو هالوژن‌ها باشند، با توجه به این‌که HA یک اسید ضعیف است؛ بنابراین همان هیدروفلوئوریک اسید فورمون! است؛ پس عنصر A، فلوئور ($_9F$) است که بیشترین خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری را در گروه هالوژن‌ها دارد.

ت) در شرایط یکسان، pH محلول اسید قوی HX، کم‌تر از محلول اسید ضعیف HA است.

AzmoonFree.ir

۸۱ چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- انحلال برخی از ترکیب‌های مولکولی در آب، به صورت یونی است.
- در یک سامانهٔ تعادلی، واکنش‌های رفت و برگشت با سرعت یکسانی انجام می‌شوند؛ از این‌رو غلظت مواد شرکت‌کننده در سامانه برابر می‌شود.
- میزان بازی‌بودن بزاق دهان در مقایسه با رودهٔ کوچک بیشتر است.
- در دمای اتاق، حاصل‌ضرب $[H^+][OH^-]$ برای محلول سود سوزآور، بیشتر از این حاصل‌ضرب برای محلول آمونیاک است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ خیلی تشریحی ✔ فقط عبارت اول درست است.

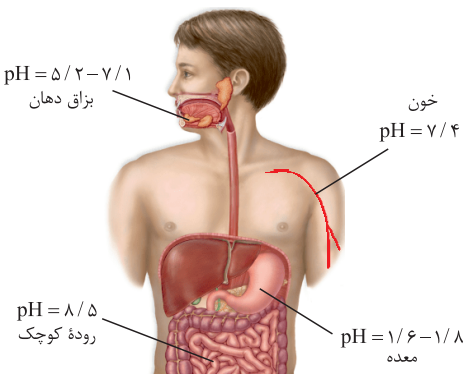
بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: مثلاً HCl یک ترکیب مولکولی است ولی در آب، به یون‌های H^+ و Cl^- یونیده می‌شود، یعنی انحلال از نوع یونی است:

$$HCl \xrightarrow{\text{در آب}} H^+ + Cl^-$$

عبارت دوم: در حالت تعادل، **سرعت** واکنش‌های رفت و برگشت با هم **برابر** است و **غلظت** مواد شرکت‌کننده در سامانه، **ثابت** باقی می‌ماند، اما لزوماً غلظت مواد با هم برابر نیست.

عبارت سوم: pH بزاق دهان در محدودهٔ ۵/۲ تا ۷/۱ و pH رودهٔ کوچک حدود ۸/۵ است؛ بنابراین میزان بازی‌بودن رودهٔ کوچک بیشتر است.



عبارت چهارم: در دمای اتاق، حاصل‌ضرب $[H^+][OH^-]$ در همهٔ محلول‌های آبی، یکسان و برابر با 10^{-14} است و این موضوع ارتباطی به قوی یا ضعیف بودن اسید و باز ندارد.

AzmoonFree.ir

۸۲ با توجه به معادله‌های داده‌شده، کدام مطلب درست است؟

$HX(aq) \rightarrow H^+(aq) + X^-(aq) \quad K_a =$ بسیار بزرگ

$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq) \quad K_a = ۲ \times ۱۰^{-۱۰}$

۱) با دو برابر کردن غلظت اولیهٔ محلول HX در دمای ثابت، $[X^-]$ در آن تغییر نمی‌کند.

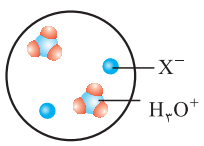
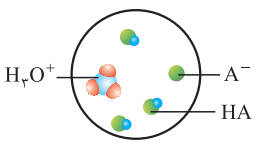
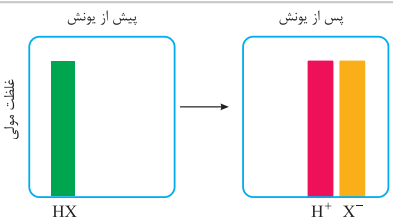
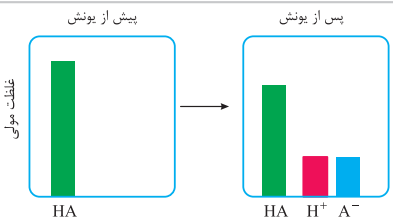
۲) محلول آبی HX، یک الکترولیت قوی و محلول آبی HA، غیرالکترولیت محسوب می‌شود.

۳) با دو برابر کردن غلظت اولیهٔ محلول HA در دمای ثابت، $[H^+]$ در محلول به تقریب $\sqrt{۲}$ برابر می‌شود.

۴) تفاوت $[H^+]$ و $[X^-]$ در محلول HX، بیشتر از تفاوت غلظت $[H^+]$ و $[A^-]$ در محلول HA است.

نکته

مقایسهٔ اسیدهای قوی و ضعیف

اسید	قوی (HX)	ضعیف (HA)
میزان یونش در آب	تقریباً به طور کامل یونش می‌یابد ($\alpha \simeq ۱$).	به طور جزئی یونش می‌یابد ($\alpha < ۱$).
گونه‌های موجود در محلول آبی (به‌جز مولکول‌های آب)	فقط یون‌های آب‌پوشیده	یون‌های آب‌پوشیده و مولکول‌های اسید یونیده‌نشده
نمای ذره‌ای محلول آبی		
نمودار یونش		
رسانای الکتریکی محلول آبی[۱]	رسانای قوی (لامپ کاملاً روشن در مدار الکتریکی)	رسانای ضعیف (لامپ نیمه‌روشن در مدار الکتریکی)
ثابت یونش (K_a)	بسیار بزرگ $HI, HBr, HCl, H_۲SO_۴$ بزرگ $HNO_۳$	یک عدد مشخص $HF > HNO_۲ > HCOOH > CH_۳COOH > H_۲CO_۳ > HCN$
سرعت واکنش با یک فلز در شرایط یکسان	سریع‌تر	آهسته‌تر
خاصیت اسیدی محلول و غلظت یون هیدرونیوم در محلول با غلظت اولیهٔ یکسان	بیشتر	کم‌تر
pH در غلظت اولیهٔ یکسان	کم‌تر	بیشتر

۱- البته به شرط غلظت کافی!

AzmoonFree.ir

پاسخ خیلی تشریحی

گزینهٔ (۱): معادلهٔ یونش HX در آب، یک‌طرفه و K_a آن بسیار بزرگ است؛ بنابراین HX یک اسید قوی است. در محلول اسیدهای قوی تک‌پروتون‌دار، غلظت یون‌ها با غلظت اولیهٔ محلول برابر است؛ بنابراین اگر غلظت محلول دو برابر شود، غلظت یون‌های حاصل از یونش نیز دو برابر خواهد شد:

$$HX \rightarrow H^+ + X^-$$

قبل از یونش: $M \quad ۰ \quad ۰$

بعد از یونش: $۰ \quad M \quad M$

گزینهٔ (۲): محلول آبی همهٔ اسیدها، الکترولیت محسوب می‌شود؛ اسید قوی الکترولیت قوی و اسید ضعیف الکترولیت ضعیف به شمار می‌آید.

گزینهٔ (۳): در دمای ثابت، مقدار ثابت یونش برای یک اسید، ثابت است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{[H^+]^۲}{M-[H^+]} \xrightarrow{\text{چون } K_a \text{ خیلی کوچک است.}} K_a = \frac{[H^+]^۲}{M}$$

$$K_a = \text{عدد ثابت} \Rightarrow \frac{[H^+]_۱^۲}{M_۱} = \frac{[H^+]_۲^۲}{M_۲} \Rightarrow \frac{[H^+]_۲}{[H^+]_۱} = \sqrt{\frac{M_۲}{M_۱}} = \sqrt{۲}$$

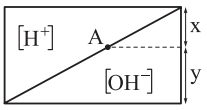
گزینهٔ (۴): غلظت یون‌های حاصل از یونش اسیدهای تک‌پروتون‌دار، با هم برابر است:

محلول HX: $[H^+] = [X^-] \Rightarrow$ تفاوت $[H^+]$ و $[X^-] = ۰$

محلول HA: $[H^+] = [A^-] \Rightarrow$ تفاوت $[H^+]$ و $[A^-] = ۰$

AzmoonFree.ir

۸۳ با توجه به نمودار مقابل که تغییر غلظت مولی یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید را در محلول‌های آبی در دمای اتاق نشان می‌دهد، اگر $\frac{۲y}{۳x+y}=۱/۵$ باشد، **pH** محلول **A** کدام است؟ $(\log ۲=۰/۳, \log ۳=۰/۵)$



۱) ۴/۵
۲) ۷/۵
۳) ۸/۵
۴) ۹/۵

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا با توجه به نسبت داده‌شده، رابطهٔ x و y را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۲y}{۳x+y}=۱/۵ \Rightarrow ۲y=۴/۵x+۱/۵y$$

$$\Rightarrow ۰/۵y=۴/۵x \Rightarrow y=۹x$$

در دمای اتاق، در محلول‌های آبی داریم:

$$[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴} \xrightarrow{[H^+]=x,[OH^-]=۹x} x\times ۹x=۱۰^{-۱۴} \Rightarrow ۹x^۲=۱۰^{-۱۴}$$

$$\Rightarrow [H^+]=x=\sqrt{\frac{۱۰^{-۱۴}}{۹}}=\frac{۱۰^{-۷}}{۳}\,mol.L^{-۱}$$

بنابراین pH این محلول برابر است با:

$$pH=-\log[H^+]=-\log\frac{۱۰^{-۷}}{۳}=-(\log ۱۰^{-۷}-\log ۳)=۷+\log ۳=۷/۵$$

AzmoonFree.ir

۸۴ غلظت یون یدید در محلول چند مولار هیدرویدیک اسید با مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول ۰/۲ مولار **HA** با $K_a = ۰/۱$، برابر است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول HA را حساب می‌کنیم:

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

	HA	H^+	A^-
غلظت اولیه:	۰/۲	۰	۰
تغییر غلظت:	$-x$	$+x$	$+x$
غلظت نهایی:	$۰/۲-x$	x	x

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \Rightarrow ۰/۱ = \frac{x^۲}{۰/۲-x}$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۰/۱x - ۰/۰۲ = ۰$$

نکته برای حل معادلهٔ درجه‌دوم به شکل $ax^۲ + bx + c = ۰$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac$$

$$x_{۱,۲} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$x^۲ + ۰/۱x - ۰/۰۲ = ۰$$

$$\Delta = (۰/۱)^۲ - ۴(۱)(-۰/۰۲) = ۰/۰۹ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ۰/۳$$

$$x = \frac{-۰/۱ \pm ۰/۳}{۲} \begin{cases} \nearrow x = -۰/۲ \text{ غ.ق.ق.} \\ \searrow x = ۰/۱ \end{cases}$$

$$\text{مجموع غلظت مولی یون‌ها} = [H^+] + [A^-] = ۲x = ۰/۲ \, mol.L^{-۱}$$

گام دوم: غلظت مولی محلول هیدرویدیک اسید را حساب می‌کنیم.

هیدرویدیک اسید (HI)، یک اسید قوی است و در محلول آن، $[H^+]$ و $[I^-]$ با غلظت اولیهٔ محلول برابر است؛ بنابراین $[I^-]$ در محلول ۰/۲ مولار هیدرویدیک اسید برابر با ۰/۲ مولار است.

AzmoonFree.ir

۸۵ جاهای خالی زیر به ترتیب در کدام گزینه به درستی تکمیل شده‌اند؟

الف) تفاوت **pH** محلول ۰/۲ مولار استیک اسید با **pH** آب خالص، ..... از تفاوت **pH** آن با **pH** مخلوطی از آب و صابون مایع در دمای اتاق است.

ب) از محلول آبی حاصل از فراوردهٔ واکنش هابر، می‌توان به عنوان ..... استفاده کرد. (NH_3)

پ) **pH** محلول حاصل از حل‌کردن ۰/۱ مول باریم هیدروکسید در ۴۰۰ میلی‌لیتر آب‌مقطر در دمای $25^\circ C$، برابر ..... است.

(از تغییر حجم محلول صرف نظر کنید.)

۱) بیشتر ـ شیشه‌پاک‌کن ـ ۱۳/۳

۲) بیشتر ـ لوله‌بازکن ـ ۱۳/۷

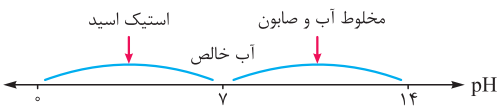
۳) کم‌تر ـ شیشه‌پاک‌کن ـ ۱۳/۷

۴) کم‌تر ـ لوله‌بازکن ـ ۱۳/۳

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی موارد:

الف) محلول استیک اسید، خاصیت **اسیدی** ($pH < 7$) و مخلوط آب و صابون مایع، خاصیت **بازی** ($pH > 7$) دارد اما آب خالص، **خنثی** ($pH = 7$) است؛ لذا با توجه به بازی‌بودن مخلوط آب و صابون مایع، تفاوت pH محلول اسیدی استیک اسید با pH مخلوط آب و صابون، **بیشتر** از تفاوت pH این مخلوط با آب خالص است:



ب) فراوردهٔ واکنش هابر، آمونیاک (NH_3) است. از محلول آبی آمونیاک که یک باز ضعیف است، به عنوان شیشه‌پاک‌کن استفاده می‌شود؛ نه لوله بازکن!

پ) باریم هیدروکسید ($Ba(OH)_2$) یک باز قوی دوظرفیتی است و از انحلال هر مول از آن در آب، دو مول یون هیدروکسید (OH^-) تولید می‌شود.

$$\text{مول } OH^- = 2 \times \text{مول } Ba(OH)_2 = 2 \times 0/1 = 0/2\,mol$$

$$\Rightarrow [OH^-] = \frac{0/2\,mol}{0/4\,L} = 0/5\,mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{0/5} = 2 \times 10^{-14}$$

در نتیجه pH این محلول برابر است با:

$$pH = -\log[H^+] = -\log 2 \times 10^{-14} = 14 - \log 2 = 14 - 0/3 = 13/7$$

AzmoonFree.ir

۸۶ اگر درصد یونش آمونیاک در محلولی از آن با $pH = ۱۱/۷$ برابر با درجهٔ یونش هیدروکلریک اسید در محلولی از آن با $pH = ۱/۵$ باشد، نسبت غلظت مولار محلول هیدروکلریک اسید به غلظت مولار محلول آمونیاک، کدام است؟ ($\log ۳ = ۰/۵$ ، $\log ۲ = ۰/۳$)

۱) ۰/۱۲
۲) ۰/۰۳
۳) ۰/۰۶
۴) ۰/۰۱۵

مشاوره سؤالات مقایسه‌ای بین دو اسید یا دو باز و یا یک اسید و یک باز، در کنکورهای اخیر خیلی مد شده است. ما هم به رسم این کنکورها (ریاضی و تجربی ۱۴۰۰ ریاضی دی ۱۴۰۱ و ...) یکی از این نوع سؤال‌ها را براتون آوردیم.

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به این‌که هیدروکلریک اسید (HCl) یک اسید قوی محسوب می‌شود؛ در نتیجه درجهٔ یونش (α) آن برابر یک است و در محلول این اسید، غلظت یون H^+ حاصل از یون اسید، برابر با غلظت اولیهٔ اسید است:

$$\text{در محلول HCl: } pH = ۱/۵ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱/۵} = ۱۰^{۰/۵} \times ۱۰^{-۲} = ۳ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$$

$$\xrightarrow{[HCl]=[H^+]} \text{غلظت اولیهٔ محلول HCl } (M_{HCl}) = ۰/۰۳\ mol.L^{-۱}$$

درصد یونش محلول آمونیاک، برابر با درجهٔ یونش محلول هیدروکلریک اسید است؛ در نتیجه درصد یونش محلول آمونیاک، برابر ۱٪ است:

$$\text{در محلول آمونیاک: } pH \xrightarrow{[H^+]=۱۰^{-pH}} [H^+] \xrightarrow{[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴}} [OH^-] \xrightarrow{[OH^-]=M\alpha} \alpha, M$$

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱۱/۷} = ۱۰^{۰/۳} \times ۱۰^{-۱۲} = ۲ \times ۱۰^{-۱۲} \Rightarrow [OH^-] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۲ \times ۱۰^{-۱۲}} = ۵ \times ۱۰^{-۳}$$

$$[OH^-] = M.\alpha \Rightarrow ۵ \times ۱۰^{-۳} = M \times ۰/۰۱ \Rightarrow M = ۰/۵\ mol.L^{-۱}$$

بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{\text{غلظت اولیهٔ محلول هیدروکلریک اسید}}{\text{غلظت اولیهٔ محلول آمونیاک}} = \frac{۰/۰۳}{۰/۵} = ۰/۰۶$$

AzmoonFree.ir

۸۷ در کدام گزینه، اثر تغییرهای گفته‌شده بر کمیت مورد نظر به درستی آورده شده است؟

الف) افزایش غلظت اولیهٔ محلول اسید بر مقدار ثابت یونش اسید در دمای ثابت

ب) رقیق‌کردن محلول یک اسید ضعیف بر درجهٔ یونش اسید

پ) افزایش غلظت محلول اتانول در آب بر رسانایی الکتریکی محلول

۱) افزایش ـ کاهش ـ افزایش

۲) بدون تأثیر ـ افزایش ـ بدون تأثیر

۳) بدون تأثیر ـ کاهش ـ افزایش

۴) کاهش ـ افزایش ـ بدون تأثیر

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی سایر گزینه‌ها:

الف) ثابت یونش اسیدی (Ka) مانند هر ثابت تعادل دیگری، فقط به دما بستگی دارد و با تغییر غلظت اولیهٔ مواد تغییری نمی‌کند.

ب) طبق رابطهٔ $Ka \simeq M\alpha^{۲}$ و ثابت‌بودن Ka، درجهٔ یونش یک اسید با غلظت محلول آبی رابطهٔ وارونه دارد:

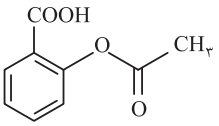
$$M_{۱}\alpha_{۱}^{۲} = M_{۲}\alpha_{۲}^{۲} \Rightarrow \frac{\alpha_{۲}}{\alpha_{۱}} = \sqrt{\frac{M_{۱}}{M_{۲}}}$$

پس با رقیق‌کردن محلول یک اسید ضعیف و کاهش M، درجهٔ یونش اسید افزایش می‌یابد.

پ) اتانول $(C_{۲}H_{۵}OH)$ به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و غیرالکترولیت است؛ یعنی محلول آن رسانای جریان برق نیست؛ بنابراین افزایش غلظت محلول، تأثیری بر رسانایی آن ندارد.

AzmoonFree.ir

۸۸ آسپرین، یکی از پرکاربردترین داروها در دنیای امروزی به‌ویژه برای بیماران قلبی است که ساختار آن به صورت زیر می‌باشد. اگر نمونه‌ای به جرم ۵/۴ گرم از این ترکیب را در مقداری آب حل کرده و حجم آن را به ۳ لیتر برسانیم، درصد یونش و **pH** محلول اسیدی حاصل تقریباً چه‌قدر است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید؛ $H=1, O=16, C=12, K_a=5\times10^{-4}: g.mol^{-1}$)



۱) ۲۰ ـ ۲/۷

۲) ۴۰ ـ ۲/۷

۳) ۲۰ ـ ۳/۳

۴) ۴۰ ـ ۳/۳

درس Box

رابطهٔ ثابت یونش (K_a) و درجهٔ یونش (α)

۱) اگر درجهٔ یونش اسید ضعیف HX برابر α و غلظت اولیهٔ اسید برابر M باشد، اسید به اندازهٔ $M\alpha$ یونیده شده و غلظت تعادلی آن برابر با $M-M\alpha$ خواهد بود؛ در نتیجه می‌توان گفت:

$$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + X^-(aq)$$

غلظت اولیه	M	۰	۰
تغییر غلظت	$-M\alpha$	$+M\alpha$	$+M\alpha$
غلظت نهایی	$M-M\alpha$	$M\alpha$	$M\alpha$

$$K_a=\frac{[H^+][X^-]}{[HX]}=\frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M-M\alpha}=\frac{M^2\alpha^2}{M(1-\alpha)}=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha}, K_a=\frac{[H^+]^2}{M-[H^+]}$$

نکته حالا اگر بخواهیم $[H^+]$ را بر حسب K_a و α به دست آوریم؛ **حاصل کار این‌جوریاست:**

$$K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow{\alpha=\frac{[H^+]}{M}} K_a=\frac{M\times\frac{[H^+]^2}{M^2}}{1-\alpha} \Rightarrow K_a=\frac{[H^+]^2}{M(1-\alpha)} \Rightarrow [H^+]=\sqrt{K_a\cdot M(1-\alpha)}$$

آسپرین با فرمول مولکولی $C_9H_8O_4$، دارای یک گروه عاملی استری و یک گروه عاملی کربوکسیل در ساختار خود است و به دلیل همین گروه کربوکسیل، هنگام انحلال در آب خاصیت اسیدی ایجاد می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: غلظت مولی این ماده را در محلول ایجادشده حساب می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی آسپرین}=\frac{\text{مول آسپرین}}{\text{حجم محلول}}=\frac{\frac{\text{جرم آسپرین}}{\text{جرم مولی}}}{\text{حجم محلول}}=\frac{\frac{5/4}{180}}{3}=0/01\ mol.L^{-1}$$

گام دوم: درجه یونش اسید را با توجه به فرمول ثابت یونش حساب می‌کنیم:

$$K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 5\times10^{-4}=\frac{0/01\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 0/05=\frac{\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha=0/2$$

بنابراین درصد یونش محلول این اسید برابر است با:

$$\%\alpha=\alpha\times100=\%20$$

توجه: برای به دست آوردن درجه یونش، می‌توانیم اعداد $\alpha=0/2$ و $\alpha=0/4$ را در معادله جای‌گذاری کنیم و نیازی به حل معادله نیست.

گام سوم: pH محلول ایجادشده را به دست می‌آوریم:

$$[H^+]=M.\alpha=0/01\times0/2=2\times10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

$$pH=-\log[H^+]=-\log 2\times10^{-3}=3-\log 2=2/7$$

AzmoonFree.ir

۸۹ کدام مطلب درست است؟

۱) با افزودن اسید به آب، با وجود افزایش غلظت یون هیدرونیوم، به دلیل کاهش غلظت یون هیدروکسید، رسانایی الکتریکی تغییر قابل توجهی نمی‌کند.

۲) برای بازکردن لوله‌ای که با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده است، باید از محلول سدیم کلرید استفاده کرد.

$Mg(OH)_2$

۳) ترکیب اصلی شیر منیزی برخلاف فراوردهٔ یونی واکنش آن با هیدروکلریک اسید، در دمای اتاق نامحلول است.

۴) در بدن انسان بالغ، روزانه بین ۲ تا ۳ لیتر شیرهٔ معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم در آن حدود ۰/۳ مولار است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگرچه با افزودن اسید آب، غلظت یون‌های H^+ افزایش و غلظت یون‌های OH^- کاهش می‌یابد، اما با توجه به افزایش غلظت یون‌های موجود در محلول، رسانایی الکتریکی بیشتر می‌شود. هم‌چنین با افزودن اسید HA به آب، غلظت یون‌های A^- نیز در محلول افزایش می‌یابد.

گزینهٔ (۲): برای بازکردن لوله‌هایی که مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده‌اند، می‌توان از **محلول غلیظ سدیم هیدروکسید** استفاده کرد؛ نه محلول سدیم کلرید!

گزینهٔ (۳): ترکیب اصلی موجود در شیر منیزی، منیزیم هیدروکسید $(Mg(OH)_2)$ است که برخلاف منیزیم کلرید $(MgCl_2)$ در دمای اتاق در آب نامحلول است.

$$Mg(OH)_2(s) + 2HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + H_2O(l)$$

گزینهٔ (۴): در بدن انسان بالغ، روزانه بین دو تا سه لیتر شیرهٔ معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم آن حدود ۰/۰۳ مولار است؛ یعنی pH شیرهٔ معده حدود ۱/۵ می‌باشد.

AzmoonFree.ir

۹۰ دربارهٔ محلول سود سوزآور (محلول **I**) و محلول آمونیاک (محلول **II**) با حجم، دما و **pH** یکسان، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- شمار مول‌های آغازی دو باز، برای تشکیل دو محلول، نابرابر است.
- غلظت مولار یون سدیم در محلول (**I**) با غلظت مولار یون آمونیوم در محلول (**II**)، برابر است.
- رسانایی الکتریکی دو محلول با هم برابر است.
- مجموع شمار گونه‌های موجود در محلول (**I**)، از مجموع شمار گونه‌های موجود در محلول (**II**)، کم‌تر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره این تیپ سؤال‌های مقایسه‌ای و مفهومی، برای دو اسید زیاد مطرح شده است و احتمال مطرح‌شدن آن برای بازها در کنکورهای آینده خیلی زیاد است، به همین دلیل، ما یکی از سؤالات کنکور (ریاضی ۱۴۰۰) رو براتون شبیه سازی کردیم!

پاسخ خیلی تشریحی ✔ همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

می‌دانیم که $NaOH$ یک باز قوی و NH_3 یک باز ضعیف است؛ بنابراین برای این‌که pH دو محلول با هم برابر باشد، باید غلظت مولی محلول $NaOH$ کم‌تر از محلول NH_3 باشد. با توجه به یکسان‌بودن حجم محلول‌ها، نتیجه می‌گیریم که شمار مول‌های $NaOH$ اولیه باید کم‌تر از شمار مول‌های NH_3 اولیه باشد.

با توجه به برابربودن pH محلول، $[H^+]$ و در نتیجه $[OH^-]$ دو محلول با هم برابر است. در محلول $NaOH$، $[OH^-]$ با $[Na^+]$ و در محلول NH_3، $[NH_4^+]$ با $[OH^-]$ برابر است:

	$NaOH \longrightarrow Na^+ + OH^-$			$NH_3 + H_2O \rightleftharpoons NH_4^+ + OH^-$		
غلظت اولیه:	M	0	0	M'	0	0
غلظت نهایی:	0	M	M	$M'-x$	$x=M$	$x=M$

با توجه به برابربودن غلظت یون‌ها در دو محلول:

رسانایی الکتریکی آن‌ها نیز با هم برابر است.

در محلول $NaOH$ (I)، برخلاف محلول NH_3 (II)، مولکول وجود ندارد؛ بنابراین مجموع شمار گونه‌ها در محلول (I) کم‌تر است.

گونه‌های محلول (I): Na^+, OH^-, H^+, H_2O (۴ گونه)

گونه‌های محلول (II): $NH_3, NH_4^+, OH^-, H^+, H_2O$ (۵ گونه)

AzmoonFree.ir

۹۱ یک نمونهٔ ۲لیتری از محلول HCl با $pH = ۱/۴$ در اختیار داریم. اگر بخواهیم pH این محلول را به ۲/۳ برسانیم، به چند لیتر محلول KOH با $pH = ۱۲/۵$ نیاز داریم و در انتهای این فرایند، غلظت یون K^+ در محلول نهایی برحسب ppm کدام است؟ (چگالی همهٔ محلول‌ها را برابر چگالی آب در نظر بگیرید؛ $K = ۳۹\ g.mol^{-۱}$)

۱) ۲ ـ ۵۸۵ ۲) ۱ ـ ۲۹۲/۵

۳) ۱ ـ ۵۸۵ ۴) ۲ ـ ۲۹۲/۵

مشاوره سؤالات خنثی شدن ناقص اسید و باز، برای اولین بار در کنکور ۱۴۰۳ رشتهٔ ریاضی، مطرح شده است. بعید نیست طراحان کنکور دوباره سراغ این موضوع بروند.

نکته *گاهی ممکنه اسید و باز قوی رو روی هم بریزن ولی به طور کامل همدیگه رو خنثی نکنن؛ یعنی یکی از اون‌ها کامل مصرف شه و تموم شه و یکی دیگه اضافه بیاد!* در این موارد می‌توان غلظت H^+ یا OH^- باقی‌مانده در محلول را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$([OH^-] \text{ یا } [H^+] = \frac{|\overbrace{n_a.M_a.V_a}^{\text{اسید}} - \overbrace{n_b.M_b.V_b}^{\text{باز}}|}{V_a + V_b} = \frac{|\text{تعداد مول } OH^- \text{ اولیه} - \text{تعداد مول } H^+ \text{ اولیه}|}{\text{حجم محلول باز} + \text{حجم محلول اسید}}$$

اگر مقدار مربوط به اسید بیشتر از مقدار مربوط به باز باشد، محیط اسیدی خواهد بود و مقدار به‌دست‌آمده از این رابطه، غلظت H^+ را نشان می‌دهد؛ اما اگر مقدار مربوط به باز بیشتر باشد، محیط بازی خواهد بود و مقدار به‌دست‌آمده، غلظت OH^- را نشان می‌دهد.

هیدروکلریک اسید (HCl)، یک اسید قوی است که براساس معادلهٔ زیر با پتاسیم هیدروکسید واکنش می‌دهد:

$$HCl(aq) + KOH(aq) \rightarrow KCl(aq) + H_۲O(l)$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** غلظت محلول اولیه و نهایی اسید و غلظت مول پتاسیم هیدروکسید رو *حساب کتاب می‌کنیم*:

محلول اسیدی اولیه: $[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱/۴} = ۴\times۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱} \xrightarrow{\alpha=۱} [HCl] = ۰/۰۴\ mol.L^{-۱}$

محلول اسیدی نهایی: $[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲/۳} = ۰/۰۰۵\ mol.L^{-۱} \xrightarrow{\alpha=۱} [H^+] = ۰/۰۰۵ mol.L^{-۱}$

محلول بازی: $[OH^-] = ۱۰^{pH-۱۴} = ۱۰^{۱۲/۵-۱۴} = ۱۰^{-۱/۵} = ۰/۰۳\ mol.L^{-۱} \xrightarrow{\alpha=۱} [KOH] = ۰/۰۳\ mol.L^{-۱}$

گام دوم: پس از انجام واکنش، محلول اسیدی اولیه به طور کامل خنثی نشده است، زیرا pH محلول نهایی برابر ۲/۳ بوده و در واقع محلول نهایی هم‌چنان خاصیت اسیدی دارد. حجم محلول اسیدی اولیه برابر با ۲ لیتر بوده و غلظت اسید در این محلول نیز برابر ۰/۰۴ مول بر لیتر است، حال اگر حجم محلول KOH به این محلول اسیدی را برابر V در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$[H^+] = \frac{\overbrace{n_a.M_a.V_a}^{\text{اسید}} - \overbrace{n_b.M_b.V_b}^{\text{باز}}}{V_a + V_b} \rightarrow ۰/۰۰۵ = \frac{(۱\times۰/۰۴\times۲) - (۱\times۰/۰۳\times V)}{۲+V}$$

$$\rightarrow ۰/۰۱ + ۰/۰۰۵V = ۰/۰۸ - ۰/۰۳V \rightarrow ۰/۰۳۵V = ۰/۰۷ \rightarrow V = \frac{۰/۰۷}{۰/۰۳۵} = ۲L$$

گام سوم: چگالی محلول‌ها برابر با $۱\ g.mL^{-۱}$ است؛ در نتیجه می‌توان گفت در انتهای این فرایند یک محلول با حجم ۴ لیتر و جرم ۴۰۰۰ گرم ایجاد می‌شود؛ بنابراین ابتدا جرم یون K^+ موجود در این محلول را حساب می‌کنیم، سپس غلظت آن را بر حسب ppm به دست می‌آوریم:

$$?g\ K^+ = ۲L \text{ محلول KOH مصرف‌شده} \times \frac{۰/۰۳\ mol\ KOH}{۱\ L \text{ محلول KOH مصرف شده}} \times \frac{۱\ mol\ K^+}{۱\ mol\ KOH} \times \frac{۳۹g\ K^+}{۱\ mol\ K^+} = ۲/۳۴g\ K^+$$

$$ppm(K^+) = \frac{\text{جرم یون } K^+}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ = \frac{۲/۳۴g\ K^+}{۴۰۰۰g \text{ محلول}} \times ۱۰^۶ = ۵۸۵$$

AzmoonFree.ir

۹۲ اگر در فرمول ..... ، x برابر ..... باشد، ترکیب مورد نظر ..... .

۱) $KHCO_x$ ، ۲، پتاسیم هیدروژن کربنات است

۲) HNO_x ، ۲، اسیدی است که قدرت اسیدی کم‌تری نسبت به هیدروسیانیک اسید دارد

۳) HNO_x ، ۳، از انحلال اکسیدهای نیتروژن در آب تولید می‌شود

۴) $KHCO_x$ ، ۳، دارای آنیونی است که در ساختار جوش شیرین نیز وجود دارد

نکته نام چند آنیون حاصل از یونش اسیدهای ضعیف، در جدول زیر آورده شده است:

فرمول آنیون	CN^-	NO_2^-	$HCOO^-$	CH_3COO^-	HCO_3^-	$C_6H_5COO^-$
نام آنیون	سیانید	نیتریت	فورمات (متانوات)	استات (اتانوات)	هیدروژن کربنات	بنزوات

پاسخ خیلی تشریحی بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌های (۱) و (۴): اگر x در $KHCO_x$ برابر ۲ باشد، آنیون سازندهٔ ترکیب (HCO_2^-)، همان یون فورمات خواهد بود؛ بنابراین نام ترکیب، پتاسیم فورمات است. اگر x برابر۳ باشد، آنیون سازندهٔ ترکیب (HCO_3^-)، همان هیدروژن کربنات است که در ساختار جوش شیرین $(NaHCO_3)$ نیز وجود دارد.

گزینه‌های (۲) و (۳): اگر x در HNO_x برابر ۲ باشد، اسید مورد نظر همان نیترو اسید (HNO_2) است که قدرت اسیدی بیشتری نسبت به هیدروسیانیک اسید دارد.

نکته مقایسهٔ قدرت اسیدی اسیدهای ضعیف مطرح‌شده در کتاب درسی به صورت زیر است:

$$K_a : HF > HNO_2 > HCOOH > CH_3COOH > H_2CO_3 > HCN$$

اگر x در HNO_x برابر ۳ باشد، اسید مورد نظر همان نیتریک اسید است که می‌تواند از انحلال N_2O_5 در آب تولید شود.

$$N_2O_5 + H_2O \rightarrow 2HNO_3$$

از انحلال همهٔ اکسیدهای نیتروژن در آب، HNO_3 تولید نمی‌شود! مثلاً NO که اکسیدی از نیتروژن است، کاملاً به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و با آب واکنش نمی‌دهد.

AzmoonFree.ir

۹۳ با توجه به جدول زیر که مواد مؤثر موجود در چند ضداسید را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟

شمارهٔ ضداسید	۱	۲	۳
مادهٔ مؤثر	$Al(OH)_3, NaHCO_3$	$Al(OH)_3, Mg(OH)_2$	$NaHCO_3$

۱) مصرف این داروها، سبب افزایش pH اسید معده می‌شوند.

۲) مخلوط مواد مؤثر ضداسید شمارهٔ (۲) با آب، منجر به تشکیل یک سامانهٔ همگن می‌شود.

۳) دو مول ضداسید شمارهٔ (۱) که مواد مؤثر آن به نسبت مولی برابر مخلوط شده‌اند، می‌تواند چهار مول HCl را خنثی کند.

۴) ضداسید شمارهٔ (۳) به عنوان مادهٔ افزودنی در تهیهٔ شوینده‌ها نیز کاربرد دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مخلوط آلومینیم هیدروکسید و منیزیم هیدروکسید با آب، یک مخلوط همگن نیست. هر دو ماده در آب، نامحلول‌اند. مخلوط این مواد با آب (شربت معده) را می‌توان سوسپانسیون در نظر گرفت.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): ضد اسیدها، اسید معده را خنثی کرده و سبب کاهش مقدار اسید معده و در نتیجه افزایش pH آن می‌شوند.

گزینهٔ (۳): *درسته!* زیرا یک مول $Al(OH)_3$، سه مول HCl و یک مول $NaHCO_3$، یک مول HCl را خنثی می‌کند.

$$Al(OH)_3 + 3HCl \rightarrow AlCl_3 + 3H_2O \quad , \quad NaHCO_3 + HCl \rightarrow NaCl + H_2O + CO_2$$

گزینهٔ (۴): با توجه به این‌که $NaHCO_3$ (جوش شیرین)، خاصیت بازی دارد، می‌تواند با چربی‌ها واکنش داده و صابون تولید کند، به همین دلیل، برای افزایش قدرت پاک‌کردن چربی‌ها، به شوینده‌ها جوش شیرین اضافه می‌کنند.

AzmoonFree.ir

شیمی دهم

۹۴ کدام موارد زیر درست است؟

الف) مولکول‌های آب از سر منفی، جذب میلهٔ شیشه‌ای مالش داده‌شده به موی سر می‌شوند.

ب) با مقایسهٔ جهت‌گیری مولکول‌های **A** و **B** در میدان الکتریکی، می‌توان نسبت نقطهٔ جوش این دو مولکول را پیش‌بینی کرد.

پ) قدرت نیروهای بین مولکولی آب، حدود دو برابر قدرت نیروهای بین مولکولی هیدروژن سولفید است.

ت) رفتار مولکول‌های آب از ویژگی‌های ساختاری و حالت هندسی **V**شکل آن سرچشمه می‌گیرد.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ

۳) الف ـ ت ۴) پ ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «پ» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) میلهٔ شیشه‌ای از لحاظ بار الکتریکی خنثی است، اما بر اثر مالش به موی سر خشک، دارای بار الکتریکی **منفی** می‌شود؛ در نتیجه مولکول‌های آب از **سر مثبت** خود (اتم‌های هیدروژن)، جذب میلهٔ شیشه‌ای مالش داده‌شده به موی سر می‌شوند.

ب) در مقایسهٔ نقطهٔ جوش دو ماده، لزوماً ماده‌ای که قطبی باشد (در میدان الکتریکی جهت‌گیری کند)، نقطهٔ جوش بیشتری ندارد و بالعکس. در واقع نیروهای بین مولکولی و نقطهٔ جوش مولکول‌ها، به قطبی‌بودن و هم‌چنین جرم و حجم آن‌ها بستگی دارد. به عنوان مثال: جرم مولی دو مولکول F_2 و HCl نزدیک به هم است، اما HCl برخلاف F_2 قطبی است؛ در نتیجه نیروی بین مولکولی در آن قوی‌تر بوده و نقطهٔ جوش بالاتری دارد:

$$\text{نیروهای بین مولکولی: } \underset{\text{قطبی}}{HCl} > \underset{\text{ناقطبی}}{F_2} \Rightarrow \text{نقطهٔ جوش: } HCl > F_2$$

اما هواستون باشه که همواره نیروهای بین مولکولی در مواد قطبی، قوی‌تر از مواد ناقطبی نیست! در برخی موارد، جرم و حجم مولکول ناقطبی *به قدری زیاده* که نیروهای بین مولکولی آن قوی‌تر از یک مولکول قطبی *می‌شه!* مثلاً می‌دانیم که مادهٔ ناقطبی ید (I_2) در دمای اتاق جامد و مادهٔ قطبی هیدروژن کلرید (HCl) گاز است؛ پس قطعاً نیروی بین مولکولی در I_2، قوی‌تر می‌باشد؛ بنابراین در این‌جا جرم و حجم زیاد I_2 بر قطبی‌بودن غلبه کرده!

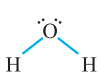
پ) گشتاور دوقطبی مولکول‌های H_2O و H_2S به ترتیب برابر با $1/85\,D$ و $0/97\,D$ است. این کمیت‌ها نشان می‌دهد که میزان قطبیت مولکول‌های آب و قدرت نیروهای بین مولکولی آن، نزدیک به دو برابر مولکول‌های هیدروژن سولفید است.

ت)

نکته آب تنها ماده‌ای است که به هر سه حالت جامد، مایع و گاز (بخار) در طبیعت وجود دارد.

برخی از ویژگی‌های آب
- توانایی حل‌کردن اغلب مواد
- افزایش حجم هنگام انجماد
- داشتن نقطهٔ جوش بالا و غیرعادی
- انحراف باریکهٔ آب از راستای طبیعی به وسیلهٔ میلهٔ شیشه‌ای مالش داده‌شده به موی خشک سر

رفتار مولکول‌های آب از ویژگی‌های ساختاری آن (نوع اتم‌های سازنده و ساختار مولکول‌ها) سرچشمه می‌گیرد. شکل مولکول‌های آب خمیده (**V**شکل) بوده و هر اتم هیدروژن با یک پیوند اشتراکی یگانه به اتم مرکزی اکسیژن متصل است:



AzmoonFree.ir

۹۵ با توجه به عبارت‌های زیر، پاسخ درست پرسش‌های زیر در کدام گزینه آمده است؟

a) این مولکول در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

b) این مولکول می‌تواند پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.

c) این مولکول به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

d) این مولکول با انحلال در آب، ماهیت خود را حفظ می‌کند.

الف) کدام عبارت(ها) برای توصیف مولکول استون $(CH_3\overset{O}{\overset{\|}{C}}CH_3)$ مناسب است؟

ب) عبارت (a) کدام‌یک از مولکول(ها) (HF, CO_2, CH_4) را توصیف می‌کند؟

پ) کدام عبارت جملهٔ زیر را توجیه می‌کند؟

«نقطهٔ جوش NH_3، از ترکیب‌های هیدروژن‌دار عنصرهای هم‌گروه نیتروژن بالاتر است.»

۱) c، CH_4 و CO_2، b

۲) c، CO_2، c

۳) c و d، CH_4، HF، d

۴) c و d، CH_4 و CO_2، b

مشاوره این سؤال، یکی از سؤالات امتحان نهایی شیمی دهم خرداد ۱۴۰۳ است.

پاسخ خیلی تشریحی

الف) استون به هر نسبتی در آب حل می‌شود (c). هم‌چنین با انحلال در آب، ماهیت خود را حفظ می‌کند (d)، زیرا انحلال آن در آب به صورت مولکولی است.

$$CH_3\overset{O}{\overset{\|}{C}}CH_3(l) \xrightarrow{\text{در آب}} CH_3\overset{O}{\overset{\|}{C}}CH_3(aq)$$

ب) مولکول‌های CH_4 و CO_2، ناقطبی‌اند و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند، اما مولکول‌های دواتمی مانند HF که از دو عنصر متفاوت تشکیل شده‌اند، قطبی‌اند.

پ) NH_3 به دلیل داشتن پیوند $N-H$ و توانایی برقراری پیوند هیدروژنی (b)، نقطهٔ جوش بالاتری نسبت به دیگر ترکیب‌های هیدروژن‌دار عنصرهای گروه ۱۵ دارد:

نقطهٔ جوش: $NH_3 > AsH_3 > PH_3$

NH_3: پیوند هیدروژنی

AsH_3: جرم مولی بیشتر

PH_3: جرم مولی کم‌تر

AzmoonFree.ir

۹۶ چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- آب یکی از موادی است که به هر سه حالت جامد، مایع و بخار (گاز) در طبیعت یافت می‌شود.
- بین مولکول‌های آب در حالت بخار، پیوند هیدروژنی وجود ندارد و مولکول‌ها به صورت آزادانه و منظم از جایی به جای دیگر انتقال می‌یابند.
- بین مولکول‌های آب در حالت مایع، پیوندهای هیدروژنی سستی وجود دارد؛ به طوری که مولکول‌ها می‌توانند روی هم بلغزند و جابه‌جا شوند.
- بین مولکول‌های آب در حالت جامد، پیوندهای هیدروژنی قوی وجود دارد و مولکول‌های آب در جاهای به نسبت ثابتی قرار دارند.
- مبنای شکل دانه‌های برف را می‌توان به وجود شش‌وجهی‌ها در ساختار منظم یخ نسبت داد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ خیلی تشریحی

فقط عبارت چهارم درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: آب **تنها** ماده‌ای است که به هر سه حالت جامد، مایع و گاز در طبیعت یافت می‌شود.

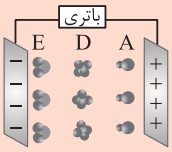
عبارت دوم: مولکول‌های آب در حالت بخار، به صورت آزادانه و **نامنظم** از جایی به جای دیگر انتقال می‌یابند.

عبارت سوم: بین مولکول‌های آب در حالت مایع، پیوندهای هیدروژنی **قوی** وجود دارد.

عبارت پنجم: مبنای شکل دانه‌های برف، وجود **شش‌ضلعی‌ها** در ساختار منظم یخ است.

AzmoonFree.ir

۹۷ با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه نادرست است؟



۱) گشتاور دوقطبی مولکول‌های A و E برخلاف مولکول D، به یقین بزرگ‌تر از صفر است.

۲) اگر نقطهٔ جوش مولکول A، بیشتر از صفر درجهٔ سلسیوس باشد، می‌تواند پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.

۳) اگر در نیروهای جاذبهٔ مولکول E، اتم هیدروژن نقش کلیدی ایفا کند، گشتاور دوقطبی آن بزرگ‌تر از یک است.

۴) نقطهٔ جوش مولکول D، به یقین از نقطهٔ جوش سایر ترکیب‌های هیدروژن‌دار عنصرهای هم‌گروه آن، کم‌تر است.

مشاوره این سؤال شبیه ساز یکی از سؤالات کنکور رشتهٔ ریاضی (اردیبهشت ۱۴۰۳) است.

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): A و E برخلاف D، در میدان الکتریکی جهت‌گیری کرده‌اند؛ بنابراین گشتاور دوقطبی آن‌ها بزرگ‌تر از صفر است.

گزینهٔ (۲): مولکول A یک مولکول قطبی دواتمی است، و چون نقطهٔ جوش آن بیشتر از صفر درجهٔ سلسیوس است، می‌تواند HF باشد که توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد.

نکته در فشار ۱atm و دمای $25^\circ C$، همه ترکیب‌های هیدروژن‌دار سه عنصر اول گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ جدول دوره‌ای (به‌جز H_2O) گازی‌شکل هستند.

گروه / دوره	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
۲	CH_4	NH_3		HF
۳	SiH_4	PH_3	H_2S	HCl
۴	GeH_4	AsH_3	H_2Se	HBr

همگی در فشار ۱atm و دمای $25^\circ C$ به حالت گازند. (نقطهٔ‌جوش آن‌ها کم‌تر از $25^\circ C$ است.)

در ضمن بدانید و آگاه باشید! که نقطهٔ جوش همهٔ این ترکیب‌ها (به‌جز HF و H_2O) منفی (کم‌تر از صفر درجهٔ سلسیوس) است؛ نقطهٔ جوش HF، $19^\circ C$ و نقطهٔ جوش H_2O، $100^\circ C$ است.

گزینهٔ (۳): مولکول E، می‌تواند آب (H_2O) باشد، که جاذبهٔ بین مولکولی آن، پیوند هیدروژنی است. گشتاور دوقطبی آب، بزرگ‌تر از یک (۱/۸۵D) می‌باشد.

گزینهٔ (۴): فرمول ترکیب‌های هیدروژن‌دار عنصرهای گروه ۱۴، مانند ترکیب D، به فرم XH_4 است. اگر D مولکول SiH_4 باشد، نقطهٔ جوش آن از CH_4 بیشتر است.

نقطهٔ جوش: $CH_4 < SiH_4 < GeH_4$

AzmoonFree.ir

۹۸ با توجه به جدول داده‌شده، کدام شکل نمای ذره‌ای بهتری از مخلوط هگزان و کربن تتراکلرید را در دمای اتاق نشان می‌دهد؟

C_6H_{14} ← هگزان — کربن تتراکلرید → CCl_4

ماده / ویژگی	هگزان (●)	کربن تتراکلرید (●)
جرم مولی $(g.mol^{-1})$	۸۶	۱۵۴
نقطهٔ جوش $(^\circ C)$	۶۸/۷	۷۶/۸
چگالی $(g.ml^{-1})$	۰/۶۶	۱/۵۹

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

درس Box

مولکول‌های قطبی و ناقطبی

هیدروکربن‌ها (C_xH_y)، مولکول‌های ناقطبی‌اند و گشتاور دوقطبی آن‌ها ناچیز و در حد صفر است. هم‌چنین مولکول‌هایی که اتم مرکزی آن‌ها جفت‌الکترون ناپیوندی ندارد و به آن، اتم‌های یکسانی متصل است، ناقطبی به شمار می‌آیند.

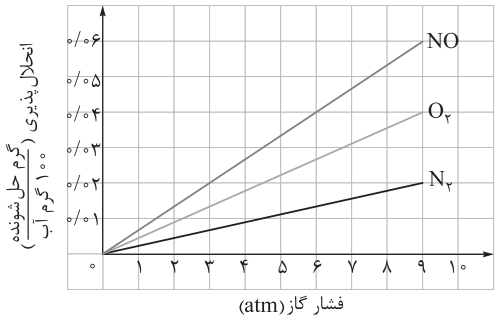
- مولکول‌ها
  - مولکول‌های دواتمی
    - دارای دو اتم یکسان ← مولکول ناقطبی ← F_2, O_2, H_2, N_2
    - دارای دو اتم غیریکسان ← مولکول قطبی ← NO, CO, HCl
  - مولکول‌های چنداتمی
    - به اتم مرکزی اتم های مختلفی متصل باشد. ← مولکول قطبی ← SCO, CH_3Cl, HCN
    - اتم مرکزی دارای الکترون ناپیوندی باشد. ← مولکول قطبی ← SO_2, NF_3 $SOCl_2, NH_3, H_2O$
    - هم اتم‌های متصل به اتم مرکزی یکسان باشند و هم اتم مرکزی، الکترون ناپیوندی نداشته باشد. ← مولکول ناقطبی ← CO_2, CH_4, SO_3

پاسخ خیلی تشریحی

هر دو مولکول هگزان (C_6H_{14}) و کربن تتراکلرید (CCl_4)، ناقطبی‌اند و طبق قاعدهٔ «شبیه، شبیه را حل می‌کند» در هم حل می‌شوند و مخلوط همگن ایجاد می‌کنند؛ *پس اصلاً کاری به چگالی این دو ماده و این‌که کی بالا و کی پایین قرار می‌گیره نداریم!* یعنی گزینه‌های (۱) و (۲) *پر!* در ضمن با توجه به نقطهٔ جوش آن‌ها (بیشتر از $25^\circ C$)، معلومه که این مواد در دمای اتاق به حالت مایع‌اند؛ بنابراین شکل گزینهٔ (۴) که آن‌ها را به حالت جامد در ته ظرف نشان داده، نمی‌تواند درست باشد. *در شکل گزینهٔ (۳) همه پی درسته!*

AzmoonFree.ir

۹۹ با توجه به نمودار مقابل که انحلال‌پذیری گازها در آب‌مقطر در دمای ثابت را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟ $(N=۱۴, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$



۱) به قانون هنری پیرامون گازها مرتبط است.

۲) معادلهٔ انحلال‌پذیری گاز نیتروژن برحسب فشار را می‌توان به صورت $S \simeq ۲/۲\times۱۰^{-۳}P$، نشان داد.

۳) در فشار ۶atm، حدود ۲/۶۷ میلی‌مول گاز نیتروژن مونوکسید در ۲۰۰ گرم آب حل می‌شود.

۴) با افزودن مقداری نمک به آب، شیب نمودار انحلال‌پذیری گاز اکسیژن افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *کاملاً درسته!* قانون هنری، اثر فشار بر انحلال‌پذیری گازها را بررسی می‌کند (با افزایش فشار، انحلال‌پذیری گازها در آب به صورت خطی افزایش می‌یابد).

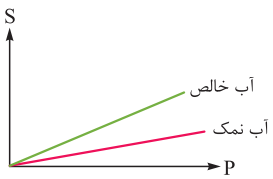
گزینهٔ (۲): عرض از مبدأ نمودار انحلال‌پذیری گازها برحسب فشار، برابر صفر است؛ بنابراین معادلهٔ انحلال‌پذیری آن‌ها به فرم $S=KP$ است؛ پس کافی است شیب نمودار $N_۲$ را پیدا کنیم:

$$K=\frac{\Delta S}{\Delta P}=\frac{۰/۰۲-۰}{۹-۰}=\frac{۲}{۹}\times۱۰^{-۲}\simeq ۰/۲۲\times۱۰^{-۲}\simeq ۲/۲\times۱۰^{-۳} \Rightarrow S\simeq ۲/۲\times۱۰^{-۳}P$$

گزینهٔ (۳): در فشار ۶atm، ۰/۰۴گرم NO در ۱۰۰ گرم آب حل می‌شود؛ بنابراین در این شرایط در ۲۰۰ گرم آب، ۰/۰۸ گرم NO حل خواهد شد. حالا باید جرم NO را به مول آن و سپس به میلی‌مول تبدیل کنیم:

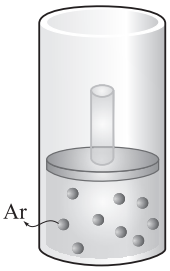
$$۰/۰۸\,g\,NO\times\frac{۱\,mol\,NO}{۳۰\,g\,NO}\times\frac{۱۰۰۰\,mmol\,NO}{۱\,mol\,NO}=\frac{۸}{۳}\simeq ۲/۶۷\ mmol$$

گزینهٔ (۴): با افزایش مقدار نمک‌ها در آب، انحلال‌پذیری گازها در آب کاهش می‌یابد؛ بنابراین با افزودن مقداری نمک به آب، شیب نمودار انحلال‌پذیری گاز اکسیژن کاهش خواهد یافت:



AzmoonFree.ir

۱۰۰ شکل روبه‌رو محلول سیرشده‌ای از گاز آرگون در ۲ لیتر آب در دمای $25^\circ C$ را نشان می‌دهد (مولکول‌های آب نشان داده نشده‌اند). اگر انحلال‌پذیری این گاز در آب در فشار $5\,atm$ و دمای $25^\circ C$، برابر $0/03$ گرم در ۱۰۰ گرم آب باشد، فشار گاز در شکل داده‌شده، چند اتمسفر است؟ (هر ذره را معادل $0/003$ مول از آن در نظر بگیرید؛ $Ar = 40\ g.mol^{-1}$)



۱) $13/5$
۲) ۹
۳) $6/75$
۴) $2/5$

Hint انحلال‌پذیری گاز را در شرایط داده‌شده به ازای ۱۰۰ گرم آب حساب کن و ببین نسبت به فشار $5\,atm$، انحلال‌پذیری چند برابر شده است.

نکته طبق قانون هنری، انحلال‌پذیری گازها در آب، با فشار نسبت مستقیم دارد و در دمای ثابت با افزایش فشار، انحلال‌پذیری گازها نیز افزایش می‌یابد.

در ضمن با توجه به خطی‌بودن نمودار انحلال‌پذیری برحسب فشار، می‌توان گفت که در دمای ثابت، با n برابر کردن فشار یک گاز، انحلال‌پذیری آن گاز نیز در آب، n برابر می‌شود.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به شکل داده‌شده، انحلال‌پذیری گاز را در ۱۰۰ گرم آب حساب می‌کنیم.

در ۲ لیتر آب، $0/027 = 0/003 \times 9$ مول Ar حل شده است:

$$\text{جرم آب} : 2\,L \times \frac{1000\,mL}{1\,L} \times \underbrace{\frac{1\,g}{1\,mL}}_{\text{چگالی آب}} = 2000\,g$$

$$\text{جرم Ar} : 0/027\,mol \times \frac{40\,g}{1\,mol} = \frac{4 \times 27}{100}\,g$$

بنابراین انحلال‌پذیری آرگون در شرایط داده‌شده، در ۱۰۰ گرم آب برابر است با:

$$100\,g\ \text{آب} \times \frac{\frac{4 \times 27}{100}\,g\ Ar}{2000\,g\ \text{آب}} = \frac{4 \times 27}{2000} = 0/054\,g\ Ar$$

گام دوم: با مقایسهٔ انحلال‌پذیری گاز در شرایط داده‌شده و فشار $5\,atm$، فشار گاز در شرایط مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow \frac{0/054}{0/03} = \frac{P_2}{5}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{5 \times 54}{30} = 9\,atm$$

AzmoonFree.ir

۱۰۱ مطابق شکل روبه‌رو، حجم‌های برابری از دو محلول توسط یک غشای نیمه‌تراوا از یکدیگر جدا شده‌اند. اگر به محلول سمت ..... غشا فشار وارد شود، فرایند اسمز معکوس انجام خواهد شد و با گذشت زمان، تفاوت غلظت مولی دو محلول ..... می‌یابد.

۱) راست ـ افزایش
۲) راست ـ کاهش
۳) چپ ـ کاهش
۴) چپ ـ افزایش

نکته

در فرایند اسمز، مولکول‌های آب به طور خودبه‌خودی از محلول رقیق‌تر وارد محلول غلیظ‌تر می‌شوند. در فرایندی به نام اسمز معکوس، *همان‌طور که از اسمش معلومه*، اتفاقی برخلاف فرایند اسمز رخ می‌دهد؛ یعنی آب از محلول غلیظ‌تر وارد محلول رقیق‌تر می‌شود. از اون‌جایی که این فرایند برخلاف قاعدهٔ کلی و طبیعی است، *باید زور بالا سرش باشه!* به عبارت دیگر اسمز معکوس با اعمال فشار انجام خواهد شد.

اسمز معکوس ← فرایندی غیرخودبه‌خودی است که طی آن با اعمال فشار بر سطح محلول غلیظ‌تر، مولکول‌های آب برخلاف روند طبیعی (فرایند اسمز) از محلول غلیظ‌تر وارد محلول رقیق‌تر می‌شوند.

پاسخ خیلی تشریحی

ابتدا باید ببینیم که کدام محلول غلیظ‌تر است.

در محلول سمت راست غشا، ۱۲ مولکول آب و ۴ یون و در محلول سمت چپ غشا، ۱۲ مولکول آب و ۶ یون وجود دارد. با توجه به این‌که نسبت شمار یون‌ها به شمار مولکول‌های آب در محلول سمت چپ، بیشتر است فشار را باید بر این محلول اعمال کرد تا اسمز معکوس انجام شود. در اسمز معکوس، یا جابه‌جایی مولکول‌های آب از محلول غلیظ به رقیق، محلول غلیظ اولیه به مرور غلیظ‌تر و محلول رقیق اولیه، به مرور رقیق‌تر می‌شود؛ بنابراین با گذشت زمان تفاوت غلظت مولی محلول‌ها افزایش می‌یابد:

AzmoonFree.ir

۱۰۲ کدام گزینه درست است؟

۱) با روش اسمز معکوس می‌توان مخلوطی از آب و اتانول را تا حد مطلوبی به اجزای سازنده تفکیک کرد.

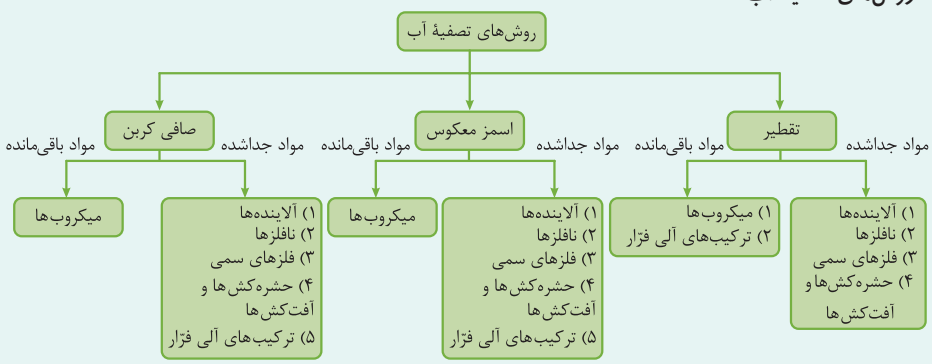
۲) آب تصفیه‌شده به روش صافی کربنی، برخلاف روش تقطیر نیاز به کلرزنی ندارد.

۳) برای حذف حشره‌کش‌ها و میکروب‌ها، روش اسمز معکوس نسبت به تقطیر، کارایی بیشتری دارد.

۴) پلاسیده‌شدن خیار تازه در آب شور به دلیل پدیدهٔ اسمز وارونه است.

درس Box

مقایسهٔ روش‌های تصفیهٔ آب



با توجه به این‌که در هر سه روش تصفیهٔ آب، میکروب‌ها در داخل آب باقی می‌مانند، آب تصفیه‌شده در همهٔ این روش‌ها را باید پیش از مصرف کلرزنی کرد، زیرا کلر خاصیت میکروب‌کشی دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به این‌که اسمز معکوس می‌تواند ترکیب‌های آلی فرّار (از جمله اتانول)، را از آب جدا کند، از این روش می‌توان برای جداسازی آب و اتانول استفاده کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

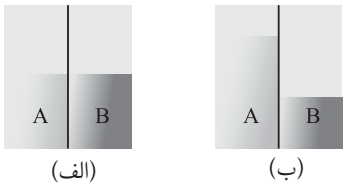
گزینهٔ (۲): آب تصفیه‌شده به همهٔ روش‌ها، به دلیل وجود میکروب‌ها، نیاز به کلرزنی دارد.

گزینهٔ (۳): هر دو روش اسمز معکوس و تقطیر، حشره‌کش‌ها را حذف می‌کنند اما توانایی حذف میکروب‌ها را ندارند.

گزینهٔ (۴): پلاسیده‌شدن خیار تازه در آب شور به دلیل پدیدهٔ اسمز است نه اسمز وارونه! با قراردادن خیار در آب شور طبق پدیدهٔ اسمز، مولکول‌های آب از سمت پرآب‌تر، یعنی بافت میوه به سمت محیط غلیظ‌تر یا کم‌آب‌تر یعنی آب شور می‌روند. در نتیجه خیار آب از دست داده و چروکیده می‌شود.

AzmoonFree.ir

۱۰۳ مطابق شکل (الف)، حجم‌های برابری از دو مایع **A** و **B** توسط یک غشای نیمه‌تراوا از یکدیگر جدا شده‌اند و پس از مدتی شکل ظرف به صورت (ب) درمی‌آید. اگر مایع اولیه **B**، محلول ۱۸ درصد جرمی گلوکز ($C_6H_{12}O_6$) ($d = 1/25\ g.mL^{-1}$) باشد، مایع **A** کدام مورد می‌تواند باشد؟ ($H = 1 , C = 12 , O = 16 : g.mol^{-1}$)



(الف) (ب)

۱) آب‌مقطر

۲) محلول ۲ مولار گلوکز

۳) محلول ۱۵ درصد جرمی گلوکز

۴) محلول ۱ مولار گلوکز

نکته در روش اسمز، آب به طور خالص از سمت محلول رقیق‌تر به سمت محلول غلیظ‌تر جابه‌جا می‌شود؛ بنابراین با گذشت زمان، سطح مایع در سطح محلول رقیق، کاهش و در سمت محلول غلیظ افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ سطح مایع در سمت A افزایش یافته است، یعنی آب از سمت محلول B به سمت محلول A جابه‌جا شده است، در نتیجه محلول B رقیق‌تر و غلظت آن کم‌تر بوده است. ابتدا غلظت مولی محلول B را حساب می‌کنیم:

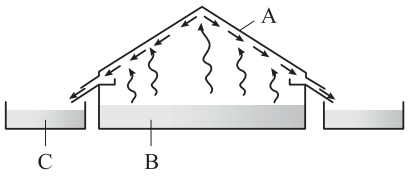
$$\text{جرم‌مولی گلوکز } (C_6H_{12}O_6) = 6(12) + 12(1) + 6(16) = 180\ g.mol^{-1}$$

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی}(d) \times \text{درصد جرمی}(a) \times 10}{\text{جرم‌مولی}} \Rightarrow \text{غلظت مولی} = \frac{10 \times 18 \times 1/25}{180} = 1/25\ mol.L^{-1}$$

$$\text{غلظت محلول B} < \text{غلظت محلول A} \Rightarrow \text{A می‌تواند محلول ۲ مولار گلوکز باشد}$$

AzmoonFree.ir

۱۰۴ با توجه به شکل مقابل که روشی برای تهیهٔ آب شیرین از آب دریا را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟



۱) این روش تقطیر نام دارد که برخلاف اسمز معکوس، در آن به غشای نیمه‌تراوا و منبع انرژی نیازی نیست.

۲) A یک سقف فلزی است که فرایند میعان بر سطح آن انجام می‌شود.

۳) در آب تهیه‌شده به این روش، فلزهای سمی و نافلزها، هم‌چنان در آب وجود دارند.

۴) اگر B دارای ترکیب‌های آلی فرّار باشد، آب تولیدشده در قسمت C باید به کمک روش‌های دیگر دوباره تصفیه شود.

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): شکل داده‌شده، مربوط به روش تقطیر است. انرژی مورد نیاز برای انجام این فرایند از پرتوهای خورشیدی تأمین می‌شود؛ *یعنی منبع انرژی نیازه! آب که خودبه‌خود تبخیر نمی‌شه!*

گزینهٔ (۲): A سقف پلاستیکی است، نه فلزی!

گزینهٔ (۳): با روش تقطیر، فلزهای سمی و نافلزها از آب حذف می‌شوند. در این روش فقط ترکیب‌های آلی فرّار و میکروب‌ها در آب باقی می‌مانند.

گزینهٔ (۴): *درسته!* باید با استفاده از اسمز معکوس یا صافی کربن، ترکیب‌های آلی فرّار را از آب حذف کرد.

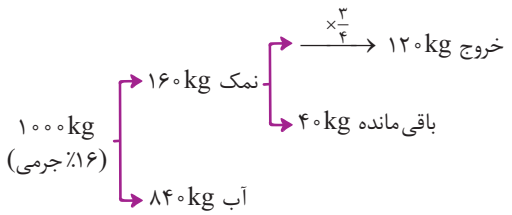
AzmoonFree.ir

۱۰۵ یک تن آب شور با غلظت ۱۶ درصد جرمی از انواع نمک‌ها را به یک دستگاه تصفیهٔ آب که با روش اسمز معکوس کار می‌کند، وارد می‌کنیم. اگر این دستگاه از هر ۴ گرم نمک، ۳ گرم آن را از آب خارج کند، جرم آب تصفیه‌شده خروجی چند کیلوگرم بوده و درصد جرمی نمک باقی‌مانده در آن به تقریب کدام است؟ (فرض کنید غشای نیمه‌تراوا، همهٔ آب خالص اولیه را از خود عبور می‌دهد.)

۱) ۸۸۰ ـ ۴/۷۵
۲) ۸۸۰ ـ ۴/۵۴
۳) ۹۶۰ ـ ۴/۷۵
۴) ۹۶۰ ـ ۴/۵۴

پاسخ خیلی تشریحی

در ابتدا ۱ تن آب شور با غلظت ۱۶ درصد جرمی داریم که طبق اطلاعات سؤال، دستگاه اسمز معکوس، $\frac{۳}{۴}$ نمک آن را از آب جدا می‌کند؛ بنابراین خواهیم داشت:



$\Rightarrow$ جرم آب خروجی (به همراه نمک‌های باقی‌مانده) $= ۸۴۰ + ۴۰ = ۸۸۰\,kg$

$$\text{درصد جرمی نمک باقی‌مانده} = \frac{\text{جرم نمک}}{\text{جرم محلول (آب و نمک)}} \times ۱۰۰ = \frac{۴۰}{۸۸۰} \times ۱۰۰ = \frac{۱۰۰}{۲۲} \simeq ۴/۵۴$$

AzmoonFree.ir